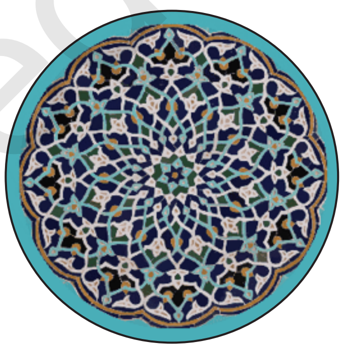
Б. Хайдаров, Э. Сариков, А. Кучкаров

ГЕОМЕТРИЯ 9

Учебник для 9-х классов средних общеобразовательных школ
Рекомендовано Министерством народного образования
Республики Узбекистан

Издание четвертое, дополненное и переработанное



Ташкент — 2019

УДК 514.1(075)
ББК 22.151ya7
Х-18

Рецензенты:

М.Шаниязова – учитель математики высшей категории ГОСШ №300 Сергелийского района города Ташкента

И.Соибова – учитель математики высшей категории ГОСШ №307 Яшнабадского района города Ташкента

Ш.Таджаддинова – учитель математики высшей категории школы №104 Сергелийского района города Ташкента

Под редакцией действительного члена Академии наук Республики Узбекистан, доктора физико-математических наук, профессора
А.Азамова

В 9-ом классе будет продолжено изучение планиметрии – части геометрии, посвященной свойствам плоских геометрических фигур. В нем вы ознакомитесь с геометрическими преобразованиями, подобием фигур, соотношениями между сторонами и углами треугольника, длиной окружности и площадью круга, метрическими соотношениями в треугольнике и окружности.

Содержание учебника построено на строгой аксиоматической системе. Теоретический материал по возможности изложен на простом и ясном языке. Все темы и понятия раскрыты при помощи разнообразных жизненных примеров. Вопросы, задачи и примеры на доказательство, вычисления и построения, данные в конце каждой темы, мотивируют ученика на творческое мышление, помогают углубить и закрепить полученные знания. Учебник отличается своеобразным дизайном и подачей материала уроков. Приведенные в нем рисунки и чертежи служат лучшему усвоению материала урока.

Издано за счет Республиканского целевого книжного фонда для аренды.

ISBN 978-9943-5874-7-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПОВТОРЕНИЕ ПРОЙДЕННОГО В 5-8 КЛАССАХ

Задачи из этой части даны для того, чтобы вспомнить геометрические фигуры и их свойства, изученные в 5-8 классах.

Также в этой части приведены задачи международных программ исследований знаний учащихся PISA и TIMSS.

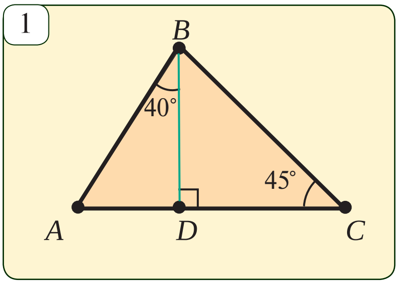
В результате изучения материалов этой части вы сможете обновить следующие знания и умения:

√ ***Повторив пройденные в 5-8 классах темы, вы освежите в памяти полученные знания и закрепите полученные умения;***

√ ***Ознакомитесь с задачами международных программ исследований по оценке знаний учащихся PISA и TIMSS;***

√ ***Это создаст основу для дальнейшего успешного изучения геометрии в 9-м классе.***

Для решения задач из этой части вы можете использовать приведенные в конце учебника сведения об основных геометрических фигурах, а также формулы, описывающие их свойства.

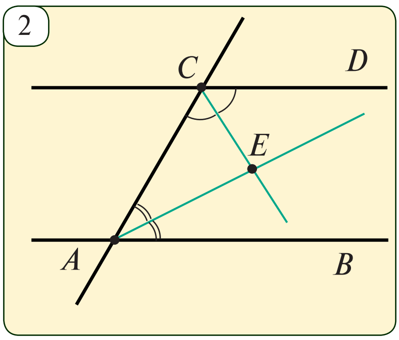


1.1. В треугольнике ABC проведена высота BD (*рис.*1). Найдите углы при вершинах A и B треугольника, если известно, что $\angle ABD = 40°$, $\angle BCD = 45°$.

Решение. 1) Так как в прямоугольном треугольнике ABD $\angle ABD = 40°$, а сумма внутренних углов треугольника равна 180°, то $\angle A = 180° - (90° + 40°) = 50°$.

2) Так как в прямоугольном треугольнике BCD $\angle BCD = 45°$, то
$\angle DBC = 180° - (90° + 45°) = 45°$.
Отсюда, учитывая равенство
$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$,
получим $\angle B = 40° + 45° = 85°$.

Ответ: 50°, 85°.



1.2. Найдите угол между биссектрисами внутренних односторонних углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей.

Решение. Пусть прямая AC пересекает параллельные прямые AB и CD (*рис.*2).

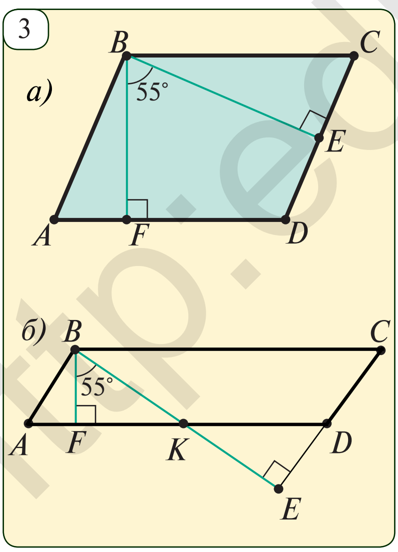
Пусть биссектрисы внутренних односторонних углов BAC и ACD пересекаются в точке E, причем $\angle EAC = x$, $\angle ECA = y$ Тогда по определению биссектрисы угла $\angle BAC = x + x = 2x$, $\angle ACD = y + y = 2y$. Так как $AB || CD$, то по свойству внутренних односторонних углов

$2x + 2y = 180°$, $x + y = 90°$.

Так как сумма внутренних углов треугольника ACE равна 180°, то

$\angle AEC = 180° - (x + y) = 180° - 90° = 90°$.

Ответ: 90°.



1.3. Найдите углы параллелограмма, если угол между высотами, исходящими из одной вершины параллелограмма, равен 55°.

Решение. Пусть угол между высотами BF и BE равен 55° (*рис.*3). Как видно из рисунка, возможны два решения:

а) так как сумма внутренних углов четырехугольника $BEDF$ равна 360°, то $55^\circ + 90^\circ + \angle D + 90^\circ = 360^\circ$. Откуда $\angle D = 125^\circ$.

б) пусть K – точка пересечения высоты BE со стороной AD. Тогда

$$\angle DKE = \angle BKF = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ.$$

По свойству внешнего угла треугольника,

$$\angle ADC = \angle DKE + \angle KED = 35^\circ + 90^\circ = 125^\circ.$$

Таким образом, в обоих случаях $\angle D = 125^\circ$. Тогда,

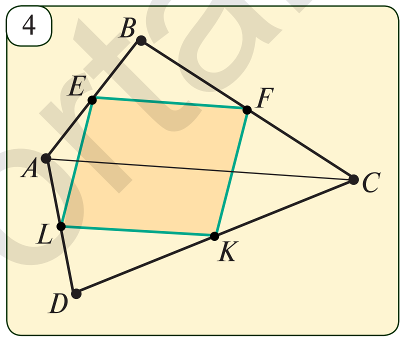
$$\angle A = \angle C = 180^\circ - \angle D = 55^\circ, \quad \angle B = \angle D = 125^\circ.$$

Ответ: 55°, 125°, 55°, 125°.

1.4. Докажите, что середины сторон выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

Решение. Пусть серединами сторон AB, BC, CD и DA четырехугольника $ABCD$ будут точки E, F, K и L соответственно (*рис.* 4). Покажем, то четырехугольник $EFKL$ – параллелограмм. Отрезок EF – средняя линия ABC, отрезок KL – средняя линия ACD. В таком случае по свойству средней линии треугольника

$$EF \| AC, \; KL \| AC, \; EF = \frac{1}{2} AC, \quad KL = \frac{1}{2} AC.$$



Отсюда $EF \| KL$ и $EF = LK$. Следовательно, по признаку параллелограмма четырехугольник $EFKL$ – параллелограмм.

1.5. В треугольнике ABC $\angle A = 47^\circ$, $\angle C = 83^\circ$. Найдите третий внутренний угол и все внешние углы треугольника.

1.6. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках E и F соответственно. Найдите углы треугольника, если $\angle BEF = 65^\circ$ и $\angle EFC = 135^\circ$.

1.7. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I. Найдите углы AIB, BIC и CIA, если $\angle A = 80^\circ$ и $\angle B = 70^\circ$.

1.8. Один из внешних углов равнобедренного треугольника равен 70°. Найдите углы треугольника.

1.9. В треугольнике ABC проведена биссектриса AK. Найдите углы треугольника, если $\angle BAK = 47^\circ$ и $\angle AKC = 103^\circ$.

1.10*. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Найдите углы AHB, BHC и CHA, если $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 60^\circ$

1.11. Докажите, что средние линии треугольника разбивают его на четыре равных треугольника.

1.12*. На продолжении медианы CD треугольника ABC отложен равный этой медиане отрезок DE, а на продолжении медианы AF отложен равный медиане AF отрезок FH. Докажите, что точки B, H, E лежат на одной прямой.

1.13. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB=BC$) проведены биссектрисы AN и CK.
а) Докажите, что отрезок KN параллелен стороне AC.
б) Докажите справедливость равенств $AK=KN=NC$.

1.14. Биссектрисы углов A и D прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке, принадлежащей стороне BC. Найдите площадь прямоугольника, если $AB = 4$ *см*.

Решение. Пусть биссектрисы углов A и D пересекаются в точке E (*рис.* 5). Так как $\angle B = 90^\circ$, $\angle BAE = 45^\circ$, то $\angle AEB = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$.

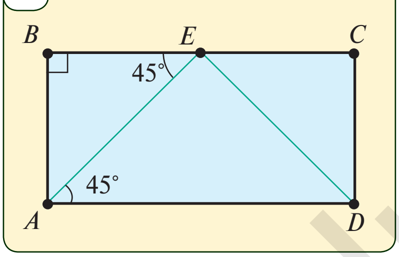
То есть ABE — прямоугольный равнобедренный треугольник, в котором $AB = BE = 4$ (*см*).

Аналогично можно показать, что $EC = CD = 4$ (*см*).

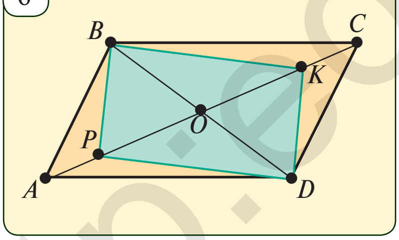
Тогда $BC = BE + EC = 8$ (*см*) и $S_{ABCD} = AB \cdot BC = 4 \cdot 8 = 32$ (*см*^{2}). ***Ответ:*** 32 *см*^{2}.

1.15. Известны три угла четырехугольника: 47°, 83° и 120°. Найдите четвертый угол.

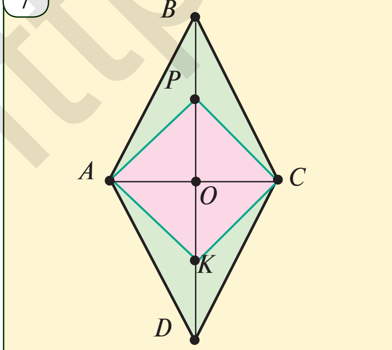
5



6



7



1.16. Сумма двух углов параллелограмма равна 156°. Найдите его углы.

1.17. Угол между диагоналями прямоугольника равен 74°. Найдите углы между одной из его диагоналей и сторонами прямоугольника.

1.18. Разность двух углов равнобедренной трапеции равна 40°. Найдите ее углы.

1.19. Один из углов ромба в три раза больше другого его угла. Найдите углы ромба.

1.20. Биссектриса угла A прямоугольника $ABCD$ разбивает сторону BC на отрезки длиной 2 *см* и 6 *см*. Найдите периметр прямоугольника.

1.21. Постройте параллелограмм со сторонами 3 *см* и 6 *см*, если расстояние между большими сторонами равно 2 *см*.

1.22. На большей диагонали AC параллелограмма $ABCD$ выбраны точки P и K (*рис.* 6). Докажите, что четырехугольник $BKDP$ – прямоугольник, если $OP=OB=OK$.

1.23*. На большей диагонали BD ромба $ABCD$ выбраны точки P и K (*рис.*7). Докажите, что четырехугольник $APCK$ — квадрат, если $OA=OP=OK$.

1.24*. На диагонали BD параллелограмма $ABCD$ выбраны точки P и K (*рис.*7). Докажите, что четырехугольник $APCK$ – параллелограмм, если $BP=KD$.

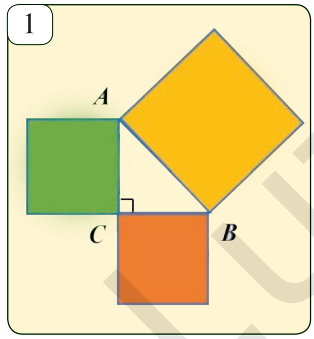
2 ТЕОРЕМА ПИФАГОРА И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Приведем 3 способа представления этой знаменитой теоремы и вспомним ее.

а) словесная формулировка: В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов;

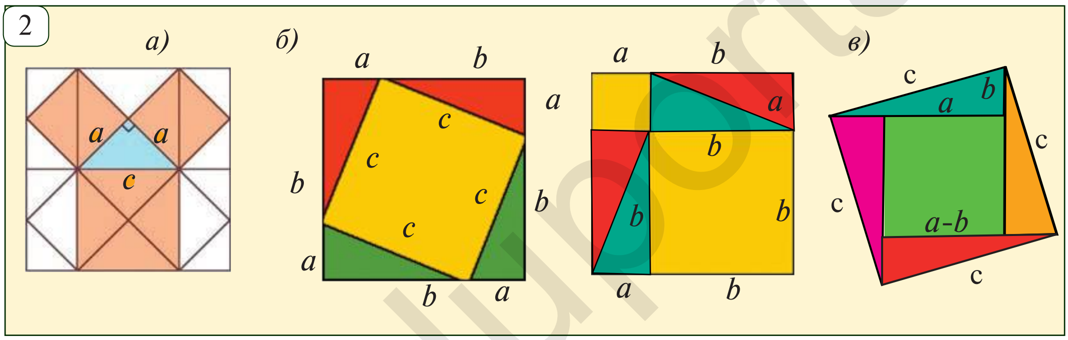
б) математическая формулировка: Пусть в треугольнике ABC: $\angle C = 90°$, $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ Тогда, $c^2 = a^2 + b^2$;

в) наглядное изображение: (*рис*.1).

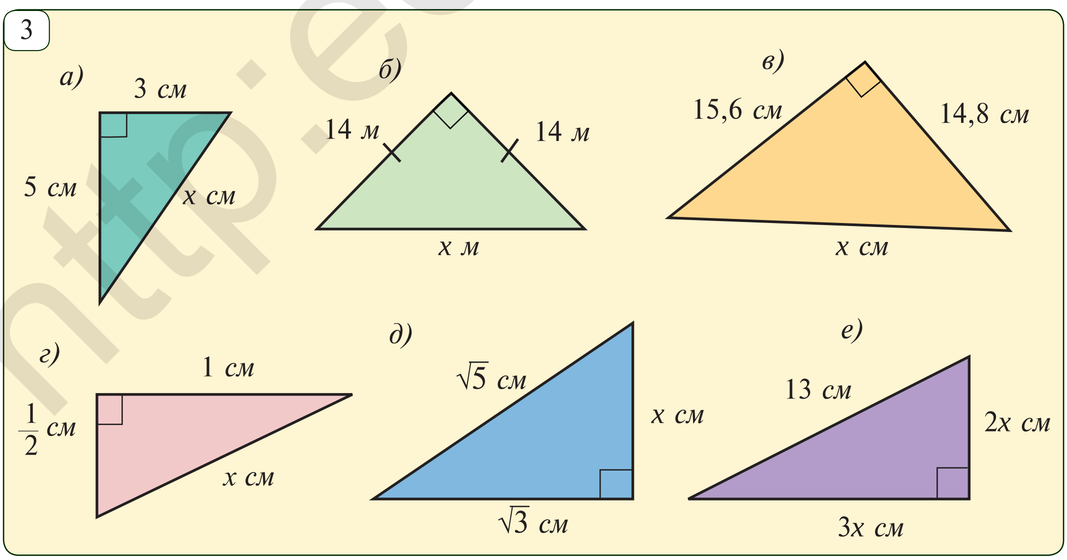


Задачи и задания.

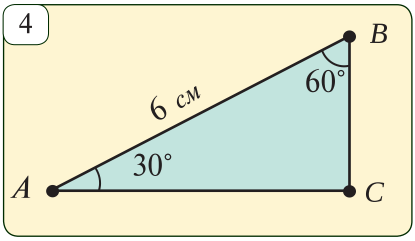
2.1. По приведенным на рис.2 чертежам восстановите несколько доказательств теоремы Пифагора.



2.2. Найдите неизвестные на основании данных рис.3.



2.3. В треугольнике ABC сторона AB равна 6 *см*, углы A и B равны 30° и 60° соответственно. Найдите площадь треугольника ABC.



Решение. Найдем угол C треугольника:

$$\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 180^\circ - (60^\circ + 30^\circ) = 90^\circ$$

Следовательно, треугольник ABC является прямоугольным треугольником с гипотенузой AB, равной 6 *см*, и углом A, равным 30°. Так как в прямоугольном треугольнике катет, лежащий напротив угла, равного 30°, равен половине гипотенузы, то $BC = 3$ *см* (*рис.*4).

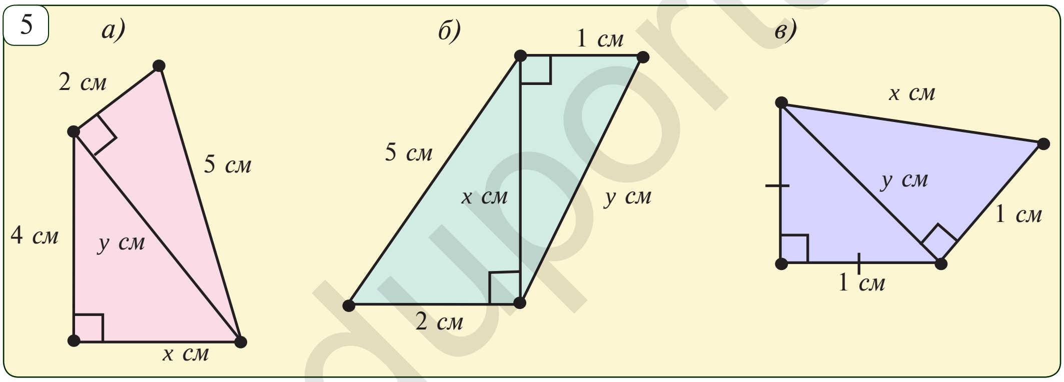
Воспользовавшись теоремой Пифагора, найдем катет AC:

$$AC^2 = AB^2 - BC^2 = 6^2 - 3^2 = 27, \qquad AC = 3\sqrt{3}\ (см).$$

Теперь найдем площадь треугольника:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2}\ 3\sqrt{3} \cdot 3 = \frac{9\sqrt{3}}{2}\ (см^2).$$

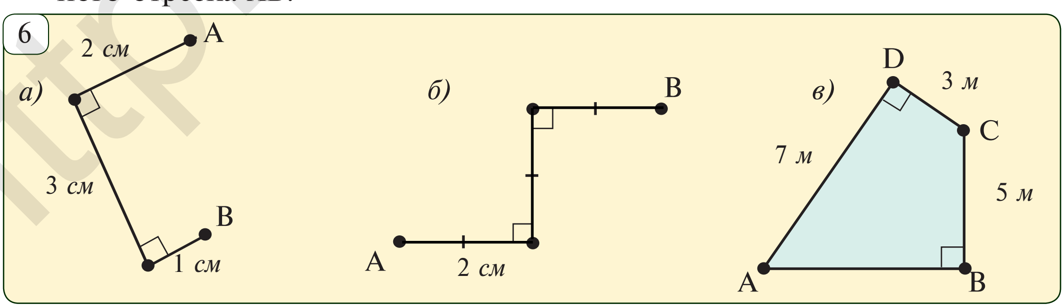
Ответ: $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ *см*².



2.4. Найдите неизвестные на основании данных *рис.*5.

2.5. Найдите высоту, опущенную на гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами 15 *см* и 20 *см*.

2.6 Построив на рис.6 соответствующие отрезки, найдите длину неизвестного отрезка AB.

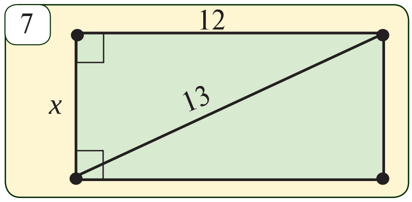


2.7. Найдите площадь прямоугольного треугольника на основании данных *рис.*7.

Решение. Обозначим через x меньшую сторону треугольника. По теореме Пифагора: $x^2 + 12^2 = 13^2$;

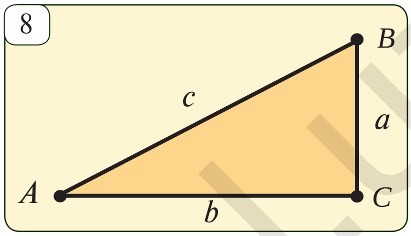
$x^2 + 144 = 169$; $x^2 = 169 - 144 = 25$; $x = \pm 5$. Так как длина является положительной величиной, то $x = 5$ *см*. Тогда площадь прямоугольного треугольника

$S = ab = 5 \cdot 12 = 60$ (*см*^{2}).   *Ответ:* 60 *см*^{2}.



7

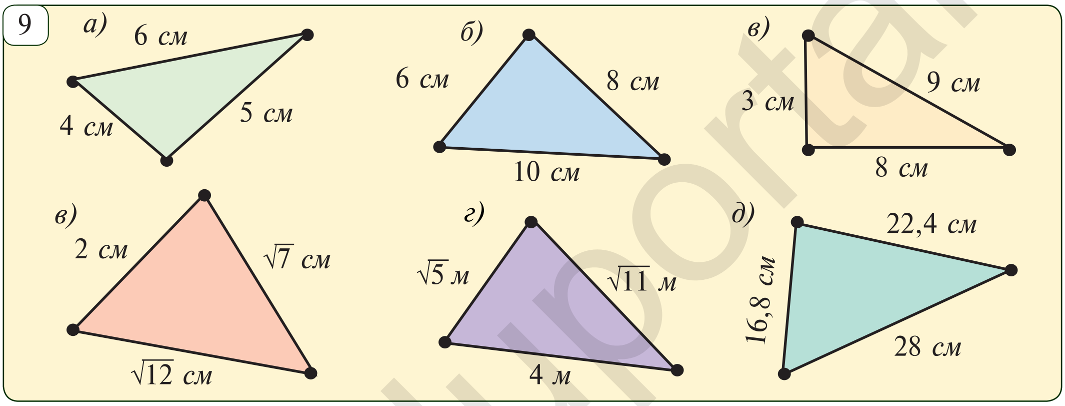
Теорема. ***Если для сторон a, b и c треугольника выполнено $c^2 = a^2 + b^2$, то этот треугольник является прямоугольным.*** (*рис. 8*).



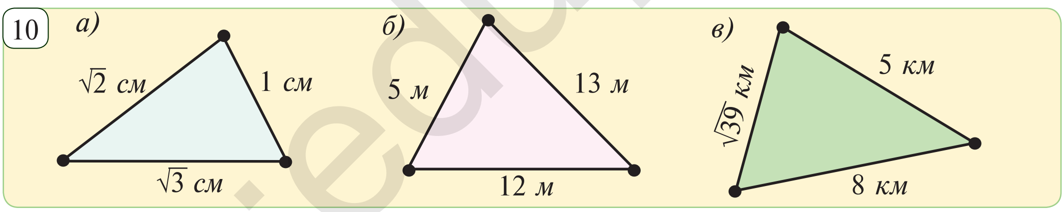
8

2.8. На рис.9 с некоторой неточностью изображены треугольники. Какие из них являются прямоугольными?

2.9. На рис.10 с некоторой неточностью изображены треугольники. Какие из них являются прямоугольными?



9



10

2.10. Найдите неизвестную площадь, изображенную на рис.11.

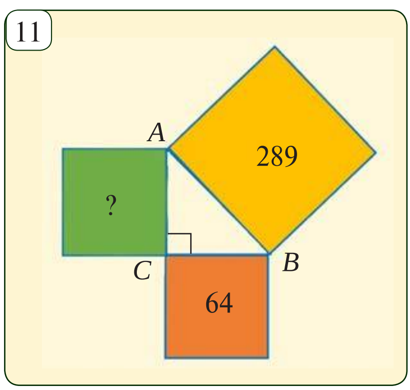
2.11. Диагонали ромба на рис.12 равны 6 *см* и 8 *см*. Найдите его сторону.

2.12. Сторона равностороннего треугольника на рис.13 равна 6 *см*. Найдите его высоту.

2.13. Найдите периметр фигуры, изображенной на рис.14.

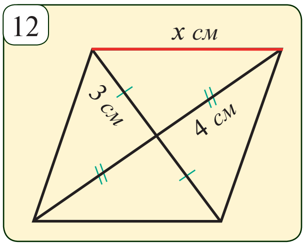
2.14. Используя данные рис.15, найдите неизвестную длину.

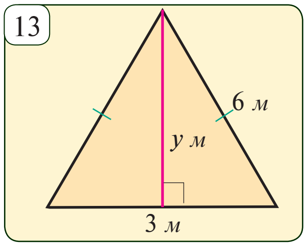
2.15. Используя данные рис.16, найдите длину отрезка *AB*.

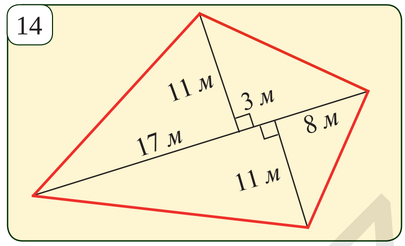


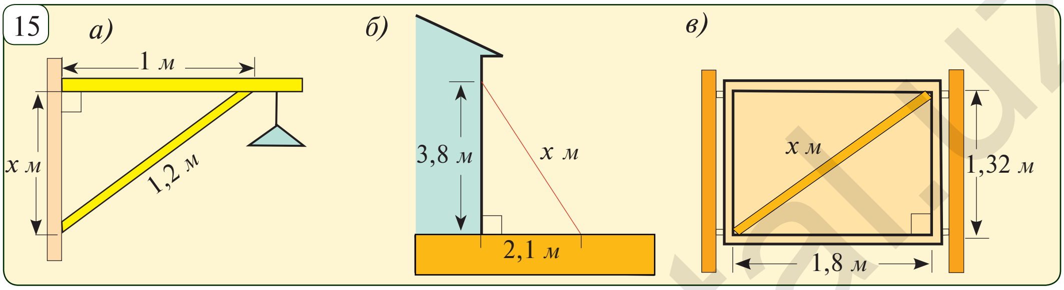
11

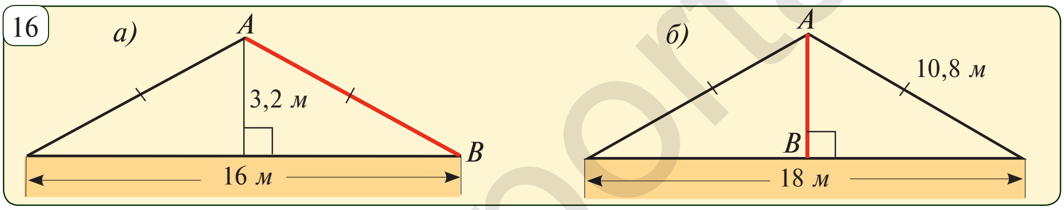
2.16. Передняя грань палатки, изображенной на рис.17, имеет форму равнобедренного треугольника. Используя данные, найдите площадь основания палатки.

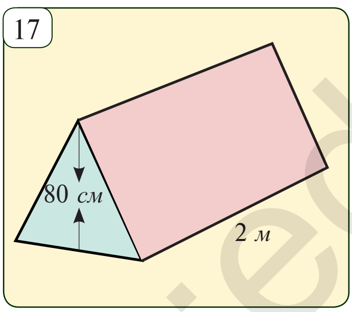


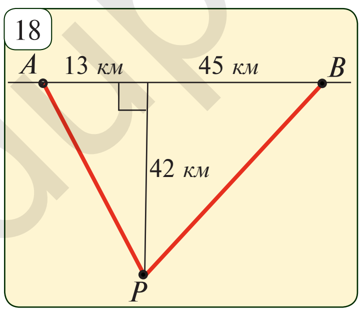


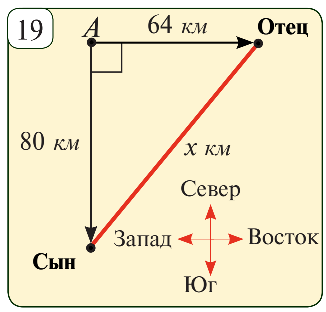












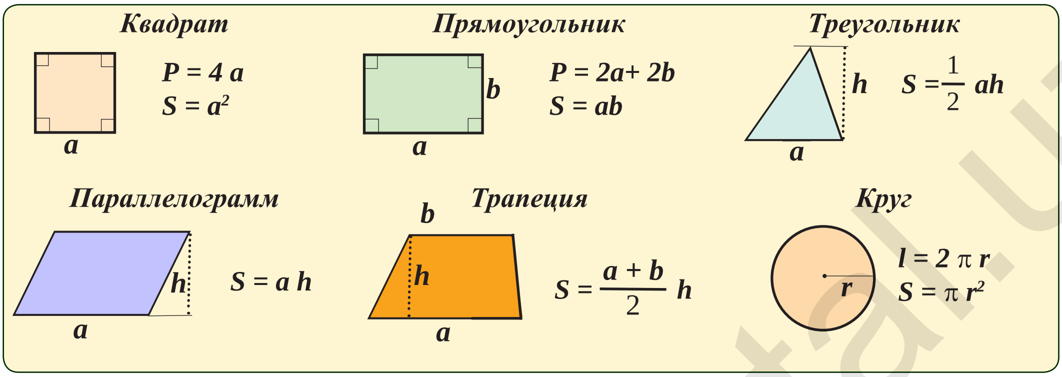
2.17. К городам *A* и *B* хотят протянуть электропровода от электростанции P. (*рис.* 18) Сколько проводов понадобится?

2.18. Из точки *A* отец выехал на велосипеде на восток со скоростью 16 км/ч, а сын выехал на юг со скоростью 20 км/ч (*рис.*19). Какое расстояние между ними будет через 4 часа?

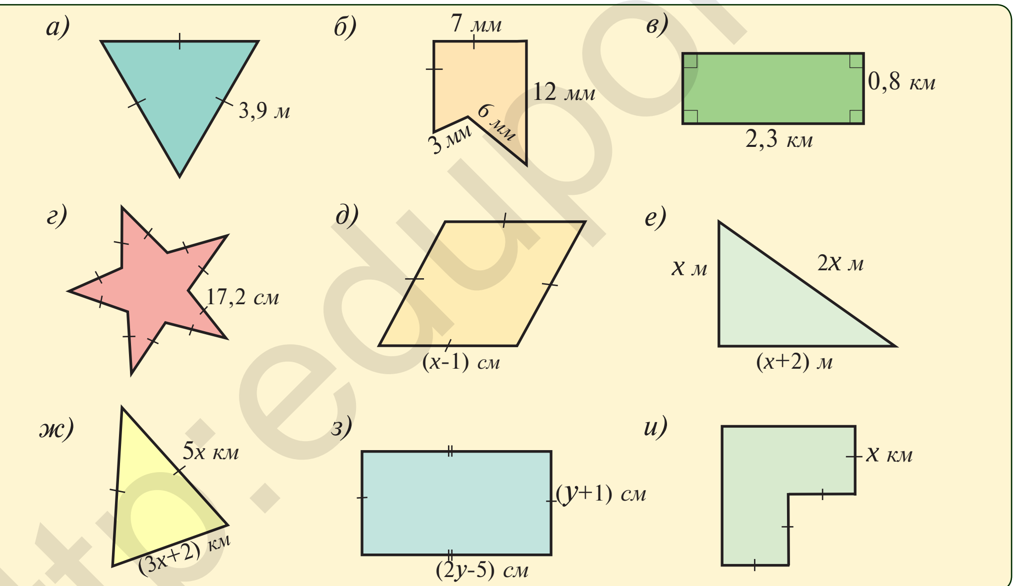
2.19. Два капитана, Джек и Хук, поплыли на своих кораблях от острова Пятницы (*рис.*20). Первый плывет на север со скоростью 15 км/ч, а второй – на запад со скоростью 16 км/ч. Какое расстояние между ними будет через 2 часа?

3 ПЕРИМЕТР ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФИГУРЫ И ЗАДАЧИ НА ЕГО ВЫЧИСЛЕНИЕ

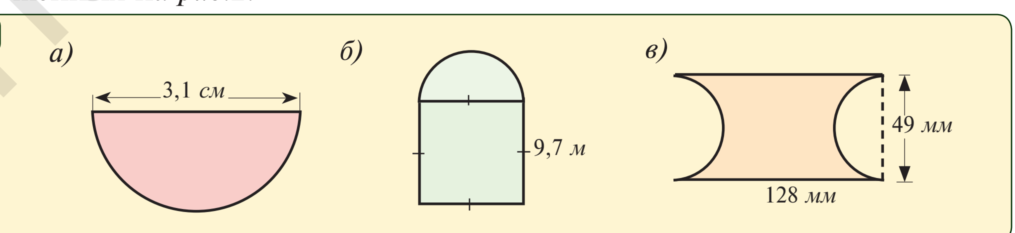
Ниже мы рассмотрим различные задачи на вычисление периметра и площади плоской геометрической фигуры.



3.1. Вычислите периметр многоугольников, изображенных на *рис.*1.

1


3.2. Вычислите периметр (длину границы) геометрических фигур, изображенных на *рис.*2.

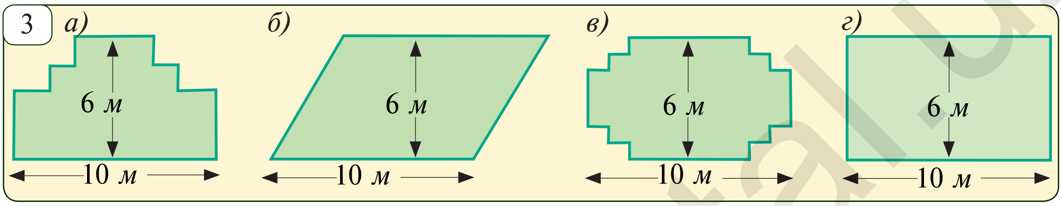
2


3.3. Можно ли окружить проволокой длиной 32 м цветники, изображенные на *рис*.3?

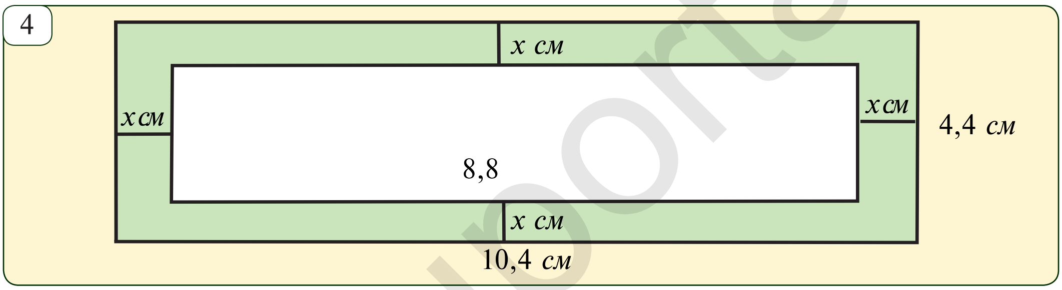
3.4. На *рис*.4 изображен план комнаты. Внутреннюю часть необходимо покрасить в белый, а внешнюю – в зеленый цвет. 1. Найдите длину неизвестного отрезка, обозначенного на рисунке. 2. Найдите площадь части, окрашенной в зеленый цвет. 3. Найдите площадь части, окрашенной в белый цвет.

3.5. Диаметр велосипедного колеса равен 64 см (*рис*.5). Ашраф проехал на велосипеде расстояние 100 м. Сколько полных оборотов проделает каждое колесо велосипеда? (Указание: длина окружности вычисляется по формуле $C=2\pi r$).

3



4



3.7. Надпись на поверхности автомобильной шины означает определенные размеры (*рис*.6.а). Например, в записи 195/55 R16 число 195 означает ширину шины в *мм:* Второе число 55 означает процентное отношение высоты профиля шины к ее ширине. В нашем случае $195 \cdot 55\% = 107$*мм*$=10,7$*см*. Запись R16 означает длину внутреннего диаметра в дюймах. Если считать, что 1 дюйм примерно равен 2,54 *см*, то в нашем случае внутренний диаметр равен $16 \cdot 2,54 = 40,64$ *см*.

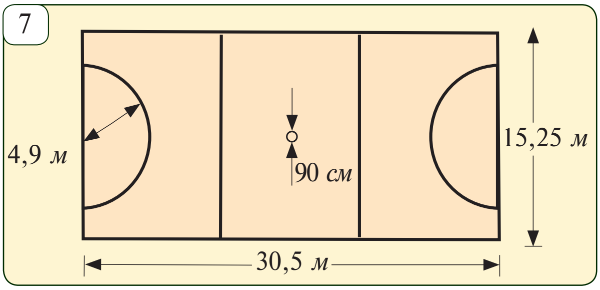
На шине автомобиля Нексия модификации Равон присутствует надпись 175/60 R15. Найдите ширину, высоту профиля, внутренний диаметр и высоту (т.е. внешний диаметр) шины.

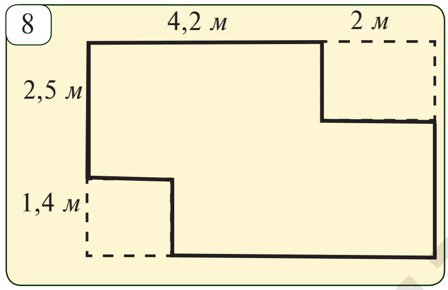
5

6

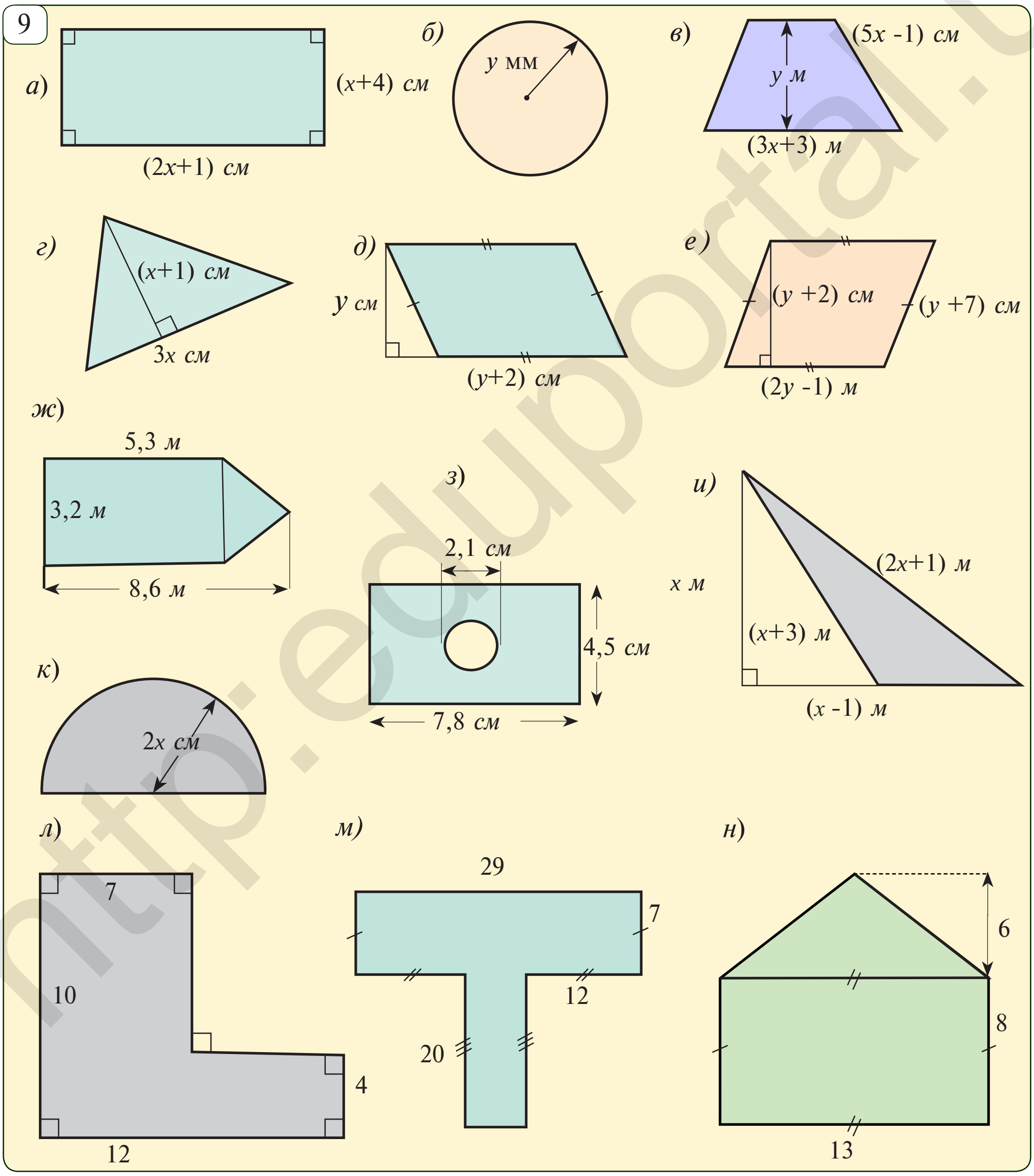
3.8. Вычислите периметр стадиона для американского футбола, изображенного на *рис*. 7.

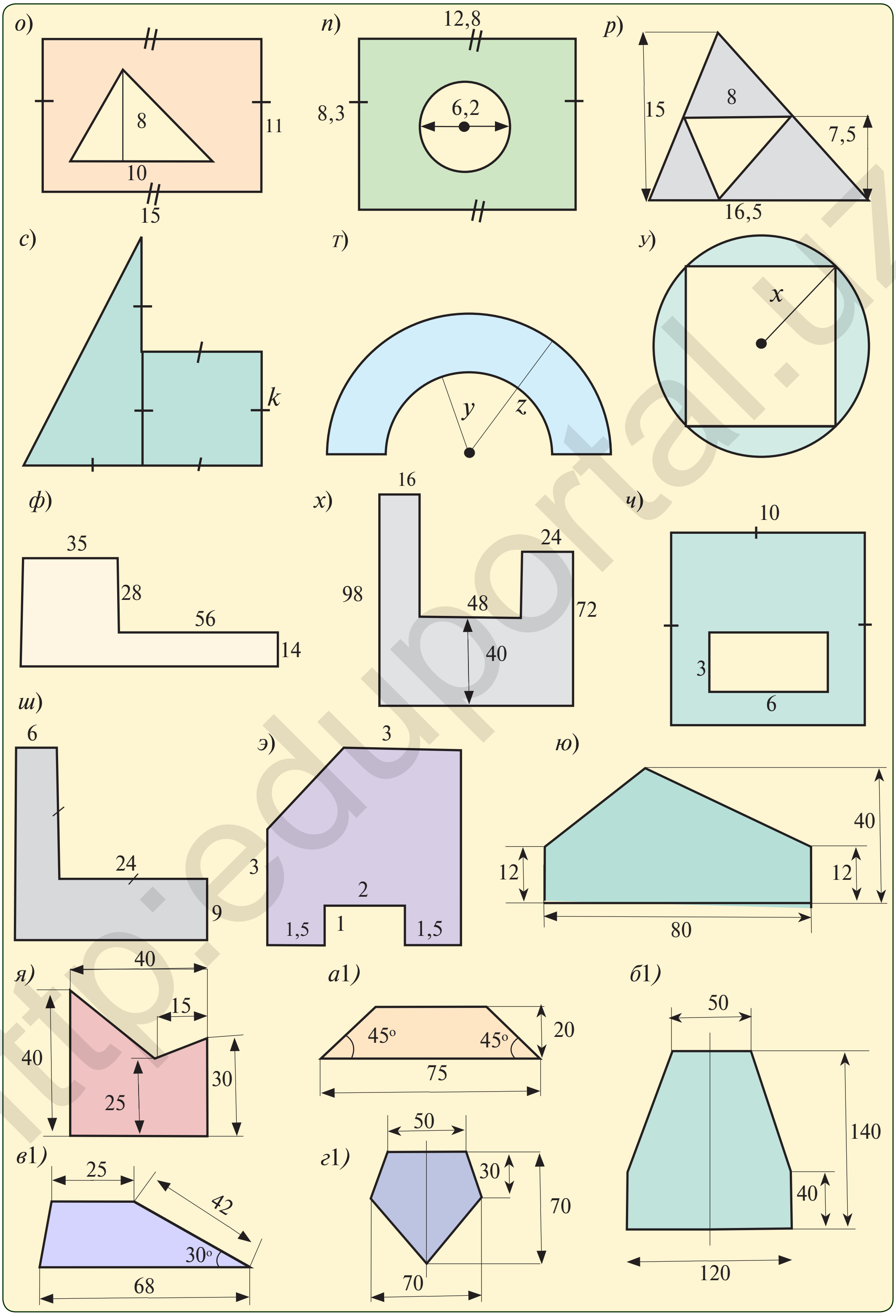
3.9. Найдите площадь земельного участка, изображенного на *рис*.8.





3.10. Найдите площади фигур, изображенных на *рис.* 9.




о)
11
8
10
15
п)
12,8
8,3
6,2
р)
15
8
7,5
16,5
с)
k
т)
y
z
у)
x
ф)
35
28
56
14
х)
16
98
24
48
72
40
ч)
10
3
6
ш)
6
24
9
э)
3
3
2
1,5
1
1,5
ю)
40
12
12
80
я)
40
15
40
30
25
а1)
45°
45°
20
75
б1)
50
140
40
120
в1)
25
42
30°
68
г1)
50
30
70
70

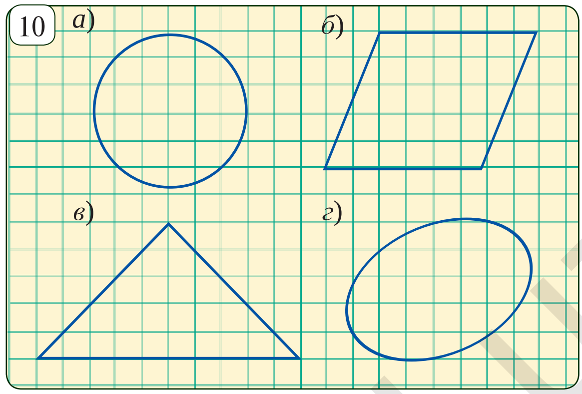
3.11. Практическое задание. Перерисуйте фигуры, приведенные на *рис.*10, в тетрадь в клетку. Какие методы для нахождения их площадей вы предложите? Как можно приблизительно определить площадь, используя клетки в вашей тетради?

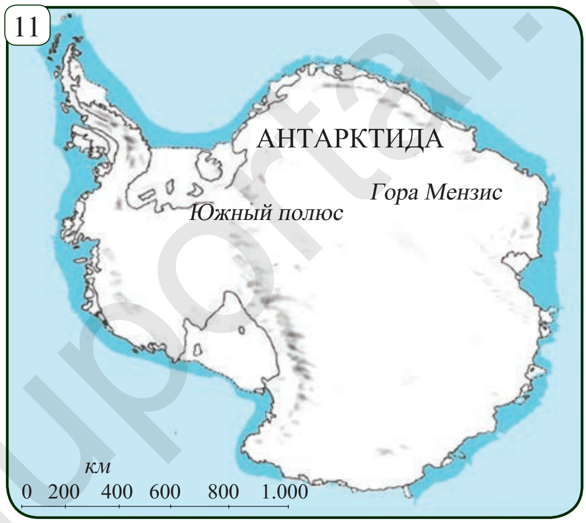
3.12. На *рис.*11 приведена карта Антарктиды. Используя масштаб и выполнив вспомогательные построения, определите приближенно площадь континента.

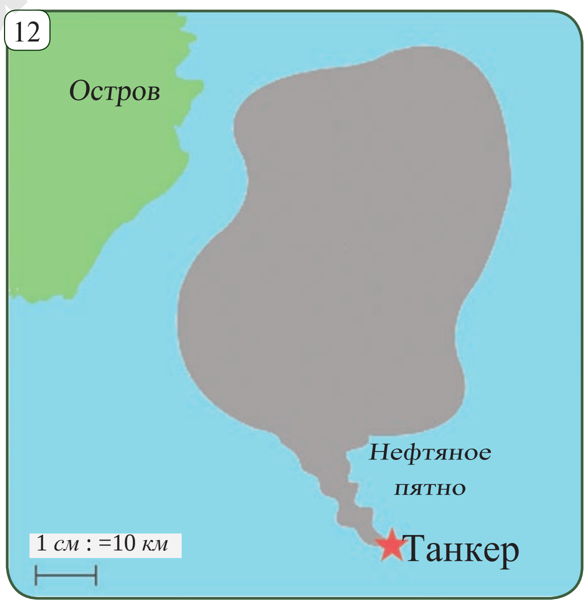
3.13. В результате аварии на нефтеналивном танкере на морской поверхности образовалось огромное нефтяное пятно (*рис.*12). Используя масштаб и выполнив вспомогательные измерения, определите приближенно площадь нефтяного пятна.

3.14. Огород имеет квадратную форму с периметром 48 *м*. Он разделен на 8 равных прямоугольных участков. Найдите а) стороны, б) площадь прямоугольных участков. На сколько процентов площадь прямоугольных участков меньше площади огорода?

3.15. Огород имеет форму прямоугольника периметра 20 *м*. Длина больше ширины в 1,5 раза. Огород поделили на малые участки. Найдите измерения участка наибольшей площади, если участки имеют форму а) квадрата, б) прямоугольника.





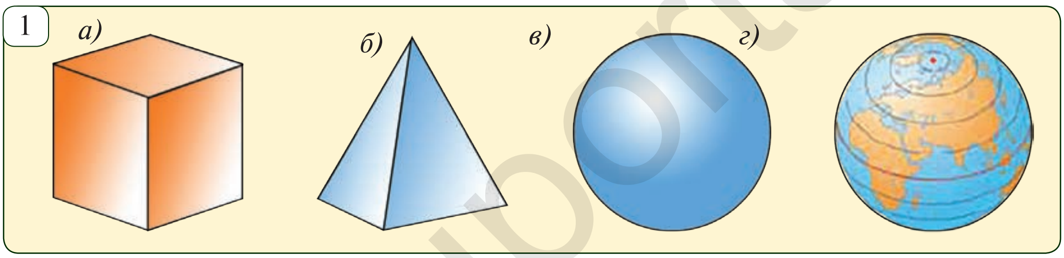


4 3D-ГЕОМЕТРИЯ – ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ В ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУРАХ

Как известно, плоские фигуры изучаются разделом геометрии, называемым планиметрией. В свою очередь, пространственные фигуры изучаются разделом геометрии, называемым стереометрией. К примеру, прямоугольник - плоская фигура, которая имеет два измерения - высоту и ширину. Параллелепипед - пространственная фигура, имеющая высоту, ширину и длину, то есть три измерения. Вы получили представление о пространственных телах в более ранних классах.

В 10-11-х классах вы более шире и систематически изучите курс стереометрии. Тем не менее, существует ряд стереометрических задач, которые можно решить с помошью планиметрии. Ниже мы приведем такие 3D - геометрические задачи (3 dimension – 3 -мерный). Давайте поближе познакомимся с основными понятиями о пространственных телах.

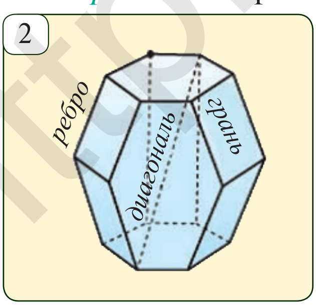
Ограниченная часть пространства называется *пространственным телом*.

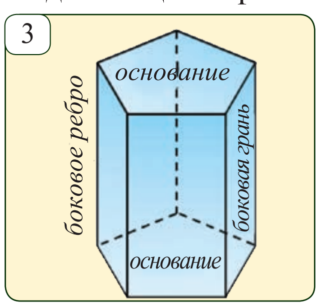


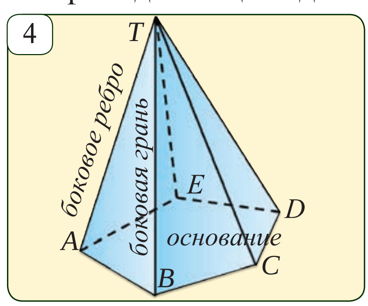
Граница пространственного тела называется ее *поверхностью*. Например, поверхность куба состоит из 6 квадратов, а поверхность шара – из сферы. Ребра куба и пирамиды (*рис.*1), образованы пересечением плоскостей.

При пересечении ребер куба и пирамиды образутся точки – их вершины. Сфера и плоскость пересекаются по окружности.

Тело, ограниченное плоскими многоугольниками, называется *многогранником*. Плоские многоугольники являются *гранями многогранника*, вершины многоугольников – *вершинами многогранника*, а стороны – *ребрами многогранника*. Отрезок, соединяющий вершины, не принадлежащие одной







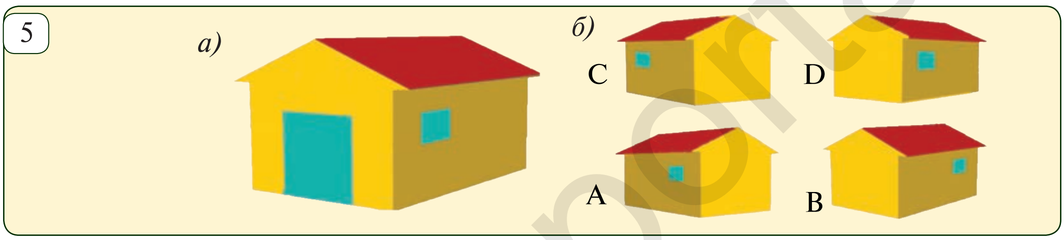
грани, называется *диагональю* многогранника.

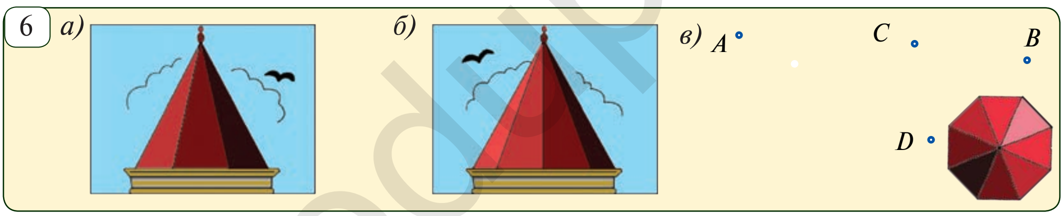
Многогранник, две грани которого являются равными многоугольниками, лежащими в параллельных плоскостях, а остальные грани — параллелограммами, имеющими общие стороны с этими многоугольниками называется *призмой*. Эти параллелограммы называются боковыми гранями призмы, а оставшиеся два многоугольника называются её *основаниями*. Многоугольник лежащий в основании определяет название призмы: *треугольная, четырёхугольная*; и т.д., *n -угольная* призма.

Пирамида — многогранник, одна из граней которого (основание) — произвольный многоугольник, а остальные грани (боковые грани) — треугольники, имеющие общую вершину. На *рис.*4 изображена пятиугольная пирамида. Пятиугольник *ABCDE* − основание пирамиды, треугольники *ATB*, *BTC*, *CTD*, *DTE*, *ETA* − его боковые грани, *T* − вершина.

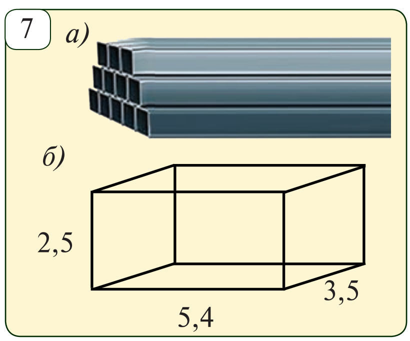
4.1 На *рис.*5.*а* изображен гараж. На *рис.* 5.*б* показан вид гаража с разных направлений. Лишь один из них соответствует заданному гаражу. Какой?

4.2. На *рис.*6.*а*- и 6.*б* показан вид здания с разных направлений. На *рис.*6.*в* показан вид сверху и отмечено несколько точек. С какой точки можно увидеть изображения 1) на *рис.*6.*а*; на *рис.*6.*б*?

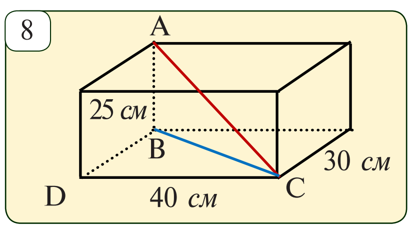




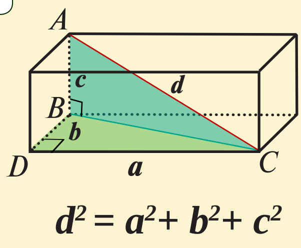
4.3. Имеется 12 шестиметровых труб (*рис.* 7.*а*). Из них необходимо составить каркас гаража в форме прямоугольного параллелепипеда 3,5 *м* в ширину, 5,4 *м* в длину и 2,5 *м* в высоту (*рис.*7.*б*). Трубы сначала разрезают на куски необходимой длины, а затем сваривают. Сколько труб понадобится при оптимальном способе разрезания? Сколько труб пойдут на отходы?



4.4. Пассажиры некоторых авиакомпаний имеют право проносить на борт чемодан с диагональю длиной не более 56 *см*. На *рис.*8 изображен чемодан в форме прямоугольного параллелепипеда с измерениями 40 *см* x 30 *см* x 25 *см*. Можно ли пронести такой чемодан?



9



Решение: Сначала найдем длину отрезка BC в основании чемодана. По теореме Пифагора: $BC^2 = 40^2 + 30^2$. Треугольник ABC – прямоугольный. Еще раз воспользуемся теоремой Пифагора и найдем диагональ чемодана: .

$AC^2 = AB^2 + BC^2$,

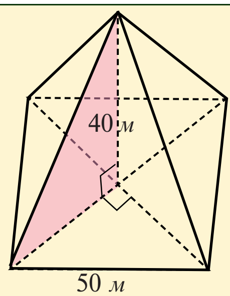
$AC^2 = 25^2 + 40^2 + 30^2 = 3125$. $AC \approx 55{,}9$ *см*.

Ответ: Можно, так как $AC < 56$ *см*.

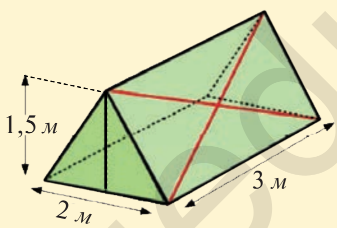
Из решения этой задачи следует следующее замечательное свойство, называемое также пространственным аналогом теоремы Пифагора. Попробуйте доказать его самостоятельно (*рис*.9).

Теорема. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов его измерений (длины, ширины и высоты).

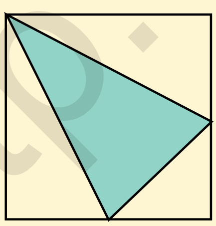
10



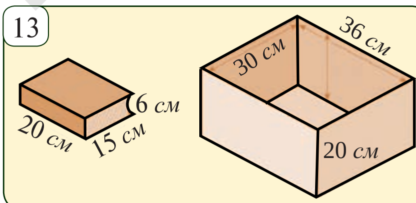
11



12



13



4.5. Пирамида, изображенная на *рис*.10, имеет высоту 40 *м*, а основание является квадратом со стороной 50 *м*. Найдите боковое ребро пирамиды.

4.6. Сколько материи понадобится для того, чтобы сшить палатку в форме призмы (*рис*.11).

4.7. Из листа бумаги в форме квадрата со стороной 8 *см* путем перегибаний изготовили пирамиду (*рис*.12). Найдите объем пирамиды.

4.8. Как заполнить наполовину сосуд в форме прямоугольного параллелепипеда не используя никаких измерений и вычислений? Пусть этот сосуд имеет 4 *см* в ширину, длина больше высоты на 0,5 *см*, а 37,7% длины равна высоте. Чему равен его объем?

4.9. Необходимо положить книги одинакого размера в коробку (*рис*.13). Сколько книг поместится в коробку?

4.10. В два аквариума налита вода, уровень которой на 10 см ниже высоты аквариумов (*рис*.14). В каком из аквариумов воды больше?

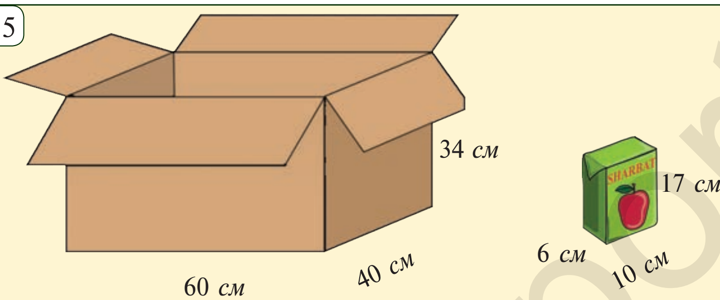
14

а) б)

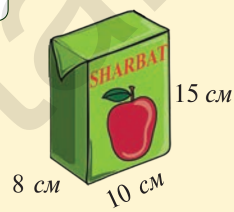
4.11. Сколько пакетов сока поместится в коробку (*рис.*15)?

4.12. Литровый пакет сока имеет форму прямоугольного параллелепипеда (*рис.*16). Сколько картона уйдет на одну упаковку?

15



16

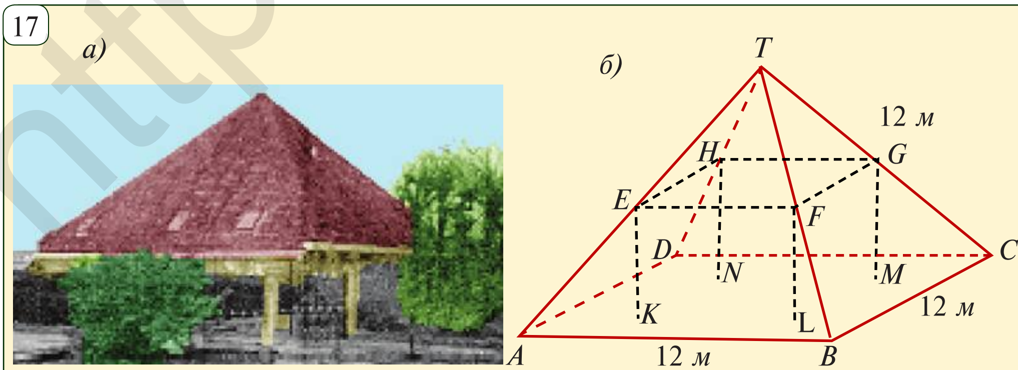


4.13. На фотографии виден жилой дом, у которого крыша имеет форму пирамиды (*рис.*17а). Ниже изображена сделанная учащимся математическая модель крыши дома и указаны длины некоторых отрезков(*рис.*17а). На данной модели пол у чердака дома — квадрат *ABCD*. Балки, на которые опирается крыша, являются сторонами бетонного блока, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда *EFGHKLMN*. *E* — середина ребра *AT*, *F* — середина *BT*, *G* — середина *CT*, *H* — середина *DT*. Все ребра пирамиды равны 12 *м*.

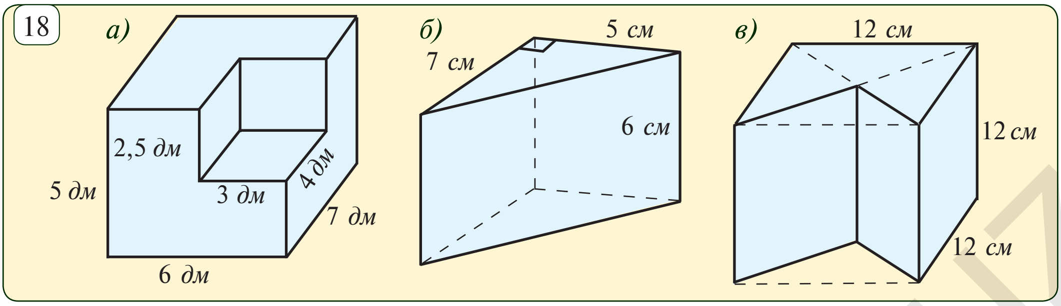
1. Вычислите площадь пола чердака — квадрата *ABCD*.
2. Найдите длину отрезка *EF* — стороны бетонного блока.

17

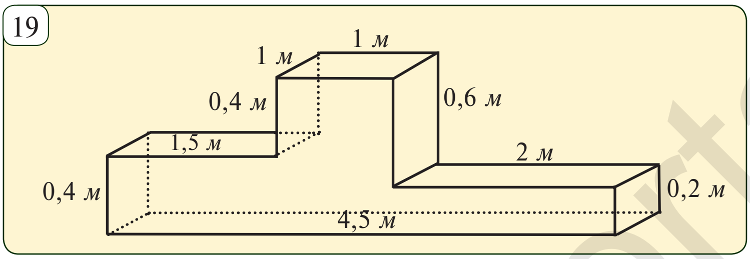
а)

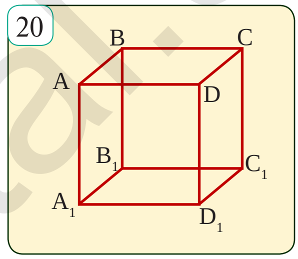


4.14*. Вычислите объем изображенных на *рис.*18 кусков дерева.

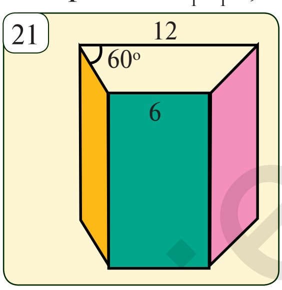


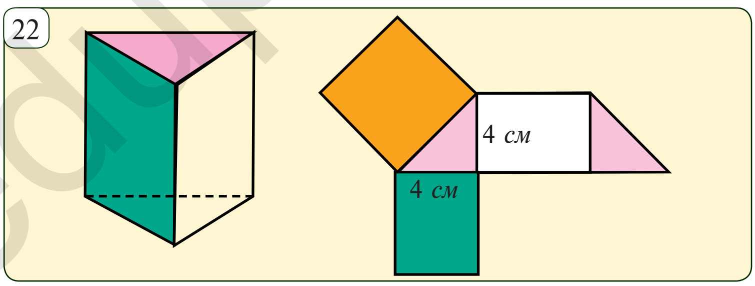
4.15. На *рис.*19 изображен пьедестал почета на спортивной арене. Используя данные, найдите его объем (все двугранные углы равны).

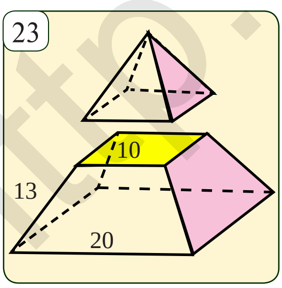




4.16. В прямоугольном параллелепипеде, изображенном на рисунке 20, периметр грани AA_1D_1D равен 20 *см*, грань $ABCD$ – квадрат с периметром 16 *см*. Найдите а) длину ломаной $ABCC_1D_1A_1$; б) периметр и площадь грани DD_1C_1C; в) объем параллелепипеда.





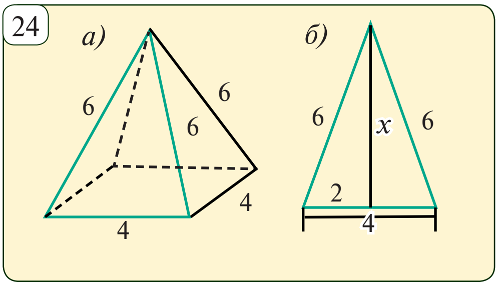


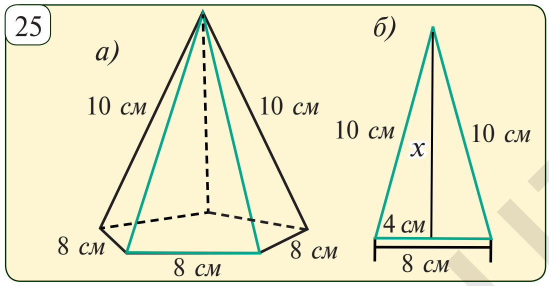
4.17. Основание прямой призмы, изображенной на *рис.*21 – равнобедренная трапеция. Основания трапеции 12 *см* и 6 *см*, один из углов при основании равен 60°. Пусть большая грань призмы – квадрат. Найдите площадь полной поверхности призмы.

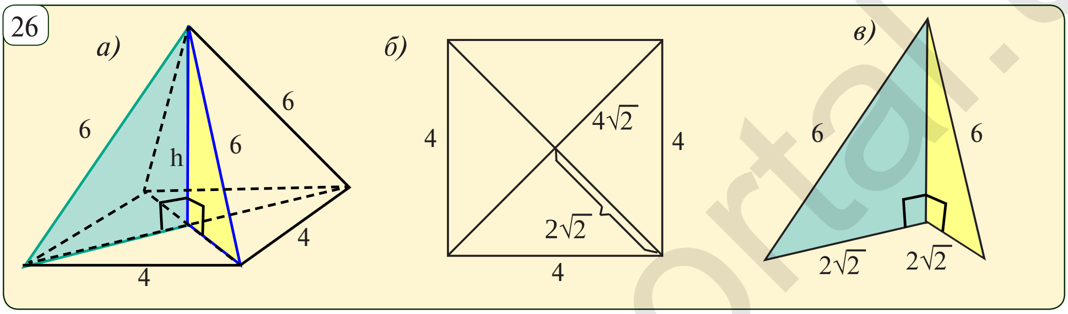
4.18. На *рис.*22 изображены призма и её развёртка. Большая грань призмы – квадрат. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

4.19. Плоскость, параллельная основанию правильной четырехугольной призмы, отсекает от нее усеченную пирамиду (*рис.*23). Стороны оснований усеченной пирамиды равны 20 *см* и 10 *см*, боковое ребро равно 13 *см*. Найдите площадь ее полной поверхности.

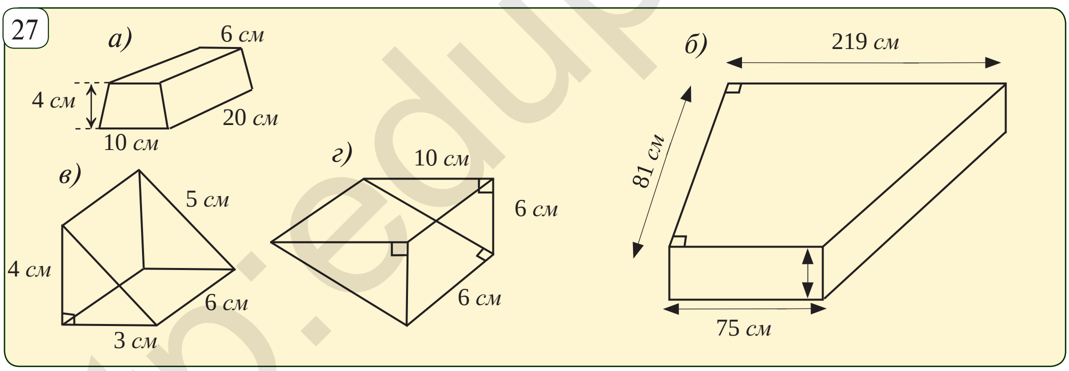
4.20. Используя данные *рис.*24-26 и вспомогательные построения, найдите неизвестные величины.







4.21. Используя данные *рис.*27, найдите полную поверхность и объем многогранника.



Геометрия и обработка дерева.

Отец и сын хотят изготовить оконную раму из реек длиной 2 *м* 20 *см*, шириной 12 *см* и толщиной 2 *см*.

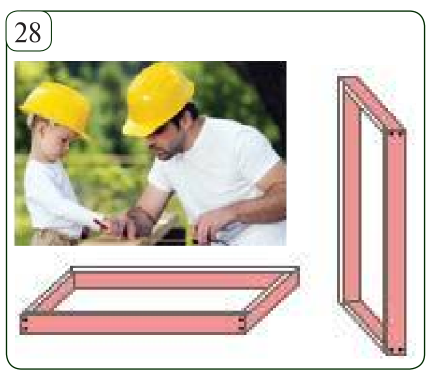
1. Составьте план работы.

2. Как можно проверить, что рама прямоугольной формы, если есть

а) треугольная линейка;

б) рулетка.

3. Сколько реек нужно, чтобы изготовить 4 рамы (*рис.*28)?

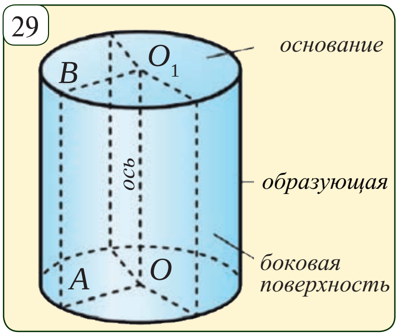


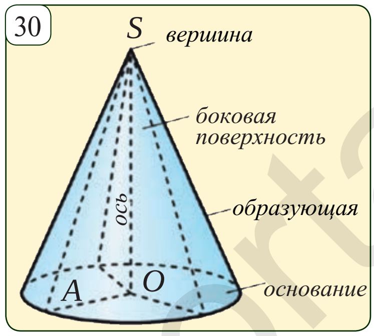
Еще один важный класс пространственных фигур образуют тела вращения.

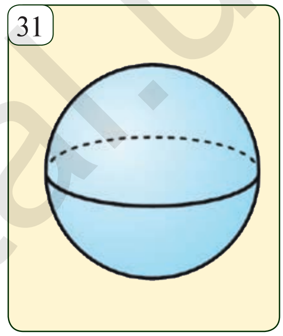
Цилиндр — геометрическое тело, образуемое вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон. На *рис.*29 изображены элементы цилиндра: *основания, образующая, ось и боковая поверхность*.

Геометрическое тело, образуемое вращением прямоугольного треугольника вокруг катета называется *конусом*. На *рис.*30 изображены вершина, основание, образующая, ось и боковая поверхность.

Геометрическое тело, образуемое вращением круга вокруг диаметра называется *шаром* (*рис.*31).



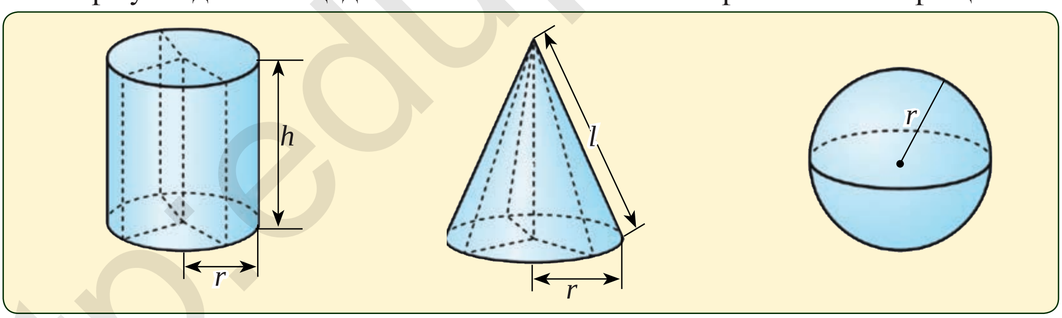




Поверхность, образуемая вращением окружности вокруг диаметра, называется *сферой*.

Ясно, что поверхность шара есть сфера. Расстояние от произвольной точки сферы до его центра определяет радиус сферы.

Формулы для площади боковой и полной поверхности тел вращения:



Цилиндр

$S_{бок.} = 2\,\pi rh$

$S_{полн.} = 2\,S_{осн.} + S_{бок.} =$

$= 2\,\pi r^2 + 2\,\pi rh$

Конус

$S_{бок.} = \pi rl$

$S_{полн.} = S_{осн.} + S_{бок.} =$

$= \pi r^2 + \pi rl$

Шар

$S = 4\,\pi r^2$

Задача 1

$h = 5$ *см*, $r = 6$ *см*,

$S_{бок.} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \approx$

$\approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 \cdot 6 = 565$ (*см*^{2}).

Задача 2

$r = 5$ *см*, $l = 12$ *см*,

$S_{полн.} = \pi r^2 + \pi rl \approx$

$\approx 3{,}14 \cdot 5^2 + 3{,}14 \cdot 5 \cdot 12 =$

$= 267$ (*см*^{2}).

Задача 3

$r = 8$ *см*,

$S = 4\pi r^2 \approx$

$\approx 4 \cdot 3{,}14 \cdot 8^2 =$

$= 803{,}84$ (*см*^{2}).

Ниже мы рассмотрим задачи на тела вращения, решаемые при помощи планиметрии.

4.22. Сумма расстояний от центра сферы до 4 точек на поверхности равна 24 *см*. Найдите диаметр сферы.

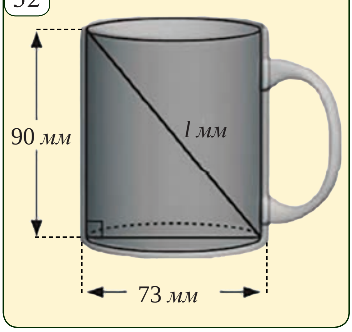
4.23. Кружка Ашрафа имеет высоту 90 *мм*, диаметр 73 *мм* (*рис* 32). Найдите минимальную длину ложки для перемешивания кофе или сахара такую, чтобы Ашраф не обжегся.

Решение: Если мы предположим, что длина ложки такая же, как на рисунке 32 равна l, то согласно теореме Пифагора:

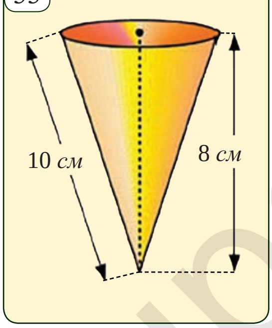
$l^2 = 73^2 + 90^2 = 13429$. Отсюда $l = 115{,}9$ *мм*.

Ответ: Длина ложки должна быть не менее 116 *мм*.

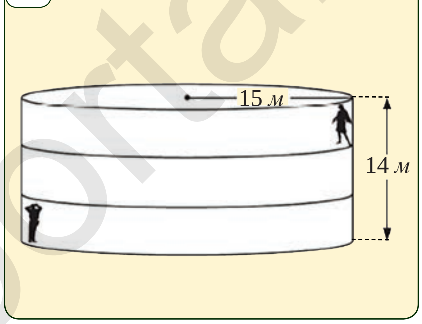
32



33



34

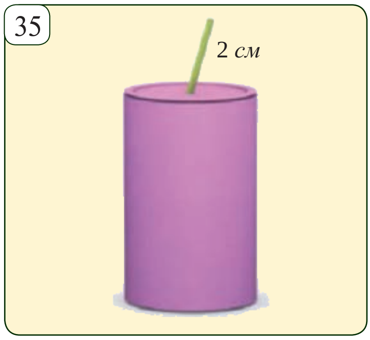


4.24. Используя *рис*.33, найдите радиус основания конуса с мороженым. Найти объем.

4.25. На *рис*.34 изображен Шекспировский театр "Глобус" в Лондоне. Определите расстояние от актера, находящегося внизу театра, до верхней зрительской ложи.

4.26. На *рис*.35 изображен сосуд цилиндрической формы. Высота его составляет 12 *см*, а ширина - 8 *см*. В центре основания есть отверстие для трубочки для питья. Какова длина трубочки? Длина видимой части трубочки составляет 2 *см*.

35



4.27. Медный конус высотой 30 *см* расплавлен, а из полученной меди отлит цилиндр. Пусть основания конуса и цилиндра одинаковы. Найдите высоту цилиндра.

5 РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРОЕКТНЫХ РАБОТ

По теме проектной работы ученики могут работать отдельно или в группах по 3-4 человека. Проект заканчивается защитой (небольшой конференцией) в конце учебного года. Проектная работа может включать следующие учебные мероприятия: планирование исследовательской деятельности, распределение задач, постановка образовательных целей, поиск необходимой информации, поиск решения проблемных вопросов, выбор лучших из них и их обоснование, проведение опросов или эксперимента, подготовка отчета о результатах проекта, анализ и оценка деятельности, подготовка и защита проектных работ.

В течение года ученики проводят самостоятельные исследования по проектной работе.

Тематика проекта может быть практической, теоретической и исследовательской. На практике знания и навыки геометрии используются для решения проблем в жизненных ситуациях. В теоретическом проекте предмет геометрии изучается подробно.

36

В исследовательском проекте проводится небольшое научное исследование по решению нестандартной геометрической задачи.

Пример практического проекта.

Назначение проекта. Стены двора, изображенные на *рис.*36, должны быть окрашены. Создайте наиболее экономичный (дешевый) проект для решения этой задачи на основе плана строительства дома (прилагается к задаче).

В ходе проекта ученики самостоятельно изучают план дома. Определяют задачи, планируют и распределяют задачи между собой. Вначале они определяют поверхность, которая будет окрашена. Ставится вопрос, сколько краски должно быть использовано. Проводятся расчеты для нескольких видов краски. Определяется и обосновывается выбор краски, исходя из критериев оптимальности. Для выбранной краски проводятся расчеты, подготавливается проект и презентация проекта.

Примечание: на рисунке план дома целиком не приведен.

Глава I

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ПОДОБИЕ

В результате изучения этой главы вы приобретете следующие знания и практические навыки:

Знания:

√ *знать определение и обозначение подобия фигур;*

√ *знать признаки подобия треугольников;*

√ *знать понятие гомотетии.*

Практические навыки:

√ *находить соответствующие элементы двух подобных треугольников;*

√ *применять признаки подобия треугольников при решении задач на доказательство и вычисление;*

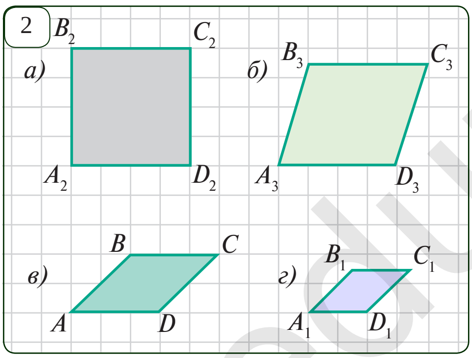
√ *применяя гомотетию, строить подобные многоугольники.*

6 ПОДОБИЕ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

1


В повседневной жизни наряду с равными фигурами мы часто сталкиваемся с фигурами, имеющими одинаковую форму, но различные размеры. При изучении истории и географии мы пользуемся картами, выполненными в различных масштабах. Карты нашей республики, прикрепленные к доске, и карты в учебнике хотя и имеют различные размеры, но они обладают одинаковой формой.

Также, одна и та же фотопленка служит основой для печати фотоснимков различного размера. Хотя их размеры различны, на них изображено одно и то же (*рис.* 1).

2


Упражнение. На рис.2 изображены четыре ромба. Из них только ромбы *в*) и *г*) имеют одинаковую форму. Чем же они отличаются от остальных ромбов? Давайте определим это вместе.

1. Из рисунка видно, что $AD=3$, $A_1D_1=2$. Так как все стороны ромба равны, то,

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{AD}{A_1D_1}=\frac{3}{2}=1{,}5$$

В этом случае говорят, что *сходственные стороны ромбов пропорциональны.*

2. В ромбах $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ $\angle A=\angle A_1=45^\circ$, $\angle B=\angle B_1=135^\circ$, $\angle C=\angle C_1=45^\circ$, $\angle D=\angle D_1=135^\circ$.

Таким образом, причина схожести этих ромбов заключается, по- видимому, в том, что их соответствующие углы равны, а сходственные стороны пропорциональны. Понятие подобия произвольных многоугольников вводится аналогично.

Пусть даны два многоугольника (пятиугольника) $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$, причем соответствующие углы равны: $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$, $\angle D=\angle D_1$, $\angle E=\angle E_1$. Тогда стороны AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CD и C_1D_1, DE и D_1E_1, EA и E_1A_1 называются *сходственными сторонами* данных многоугольников.

Определение. Два многоугольника называются *подобными*, если их углы соответственно равны и стороны одного многоугольника пропорциональны сходственным сторонам другого (*рис.*3).

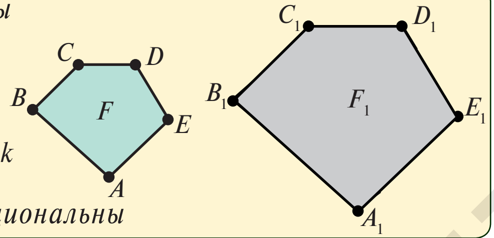
Подобие многоугольников обозначается знаком $\backsim$

3

Соответствующие углы равны

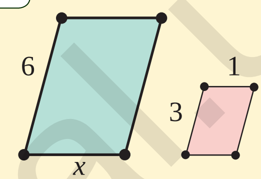
$$F \backsim F_1 \quad \begin{cases} \angle A=\angle A_1,\ \angle B=\angle B_1,\ \angle C=\angle C_1, \\ \angle D=\angle D_1,\ \angle E=\angle E_1 \\ \dfrac{A_1B_1}{AB}=\dfrac{B_1C_1}{BC}=\dfrac{C_1D_1}{CD}=\dfrac{D_1E_1}{DE}=\dfrac{E_1A_1}{EA}=k \end{cases}$$

Сходственные стороны пропорциональны



Число k, равное отношению сходственных сторон подобных многоугольников, называется коэффициентом подобия.

4



Задача 1. Известно, что многоугольники на рис.4 подобны. Найдите неизвестную сторону.

Решение. Из подобия этих многоугольников следует пропорциональность сходственных сторон.

Значит, $\dfrac{x}{6}=\dfrac{1}{3}$. Отсюда получим $x = 6 : 3 = 2$

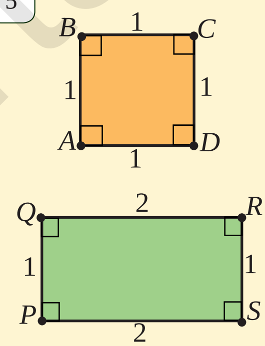
Ответ: $x = 2$.

Задача 2. Являются ли четырехугольники на рис.5 подобными? Почему?

Решение. Нет. Даже если соответствующие углы равны друг другу (90°), сходственные стороны не пропорциональны:

$$\frac{AB}{PQ}=1 \neq \frac{BC}{QR}=\frac{1}{2}$$

5



Задачи и задания.

6.1. Что такое коэффициент подобия и как он определяется?

6.2. Будут ли подобными треугольники ABC и DEF, если $\angle A=105^\circ$, $\angle B=35^\circ$, $\angle E=105^\circ$, $\angle F=40^\circ$, $AC=4{,}4$ *см*, $AB=5{,}2$ *см*, $BC=7{,}6$ *см*, $DE=15{,}6$ *см*, $DF=22{,}8$ *см*, $EF=13{,}2$ *см*?

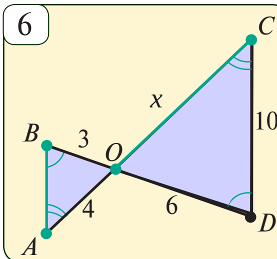
6.3. Почему ромбы а) и б) на рис.2 не являются подобными? А ромбы б) и в)?

6.4. Пусть треугольники ABO и CDO (рис. 6) подобны. Найдите стороны, AB, OC и коэффициент подобия.

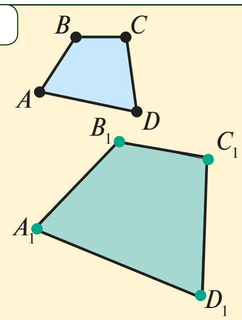
6.5. На рис.7 $ABCD \backsim A_1B_1C_1D_1$. Найдите A_1B_1, D_1A_1 и C_1D_1, если $AB = 24$, $BC = 18$, $CD = 30$, $AD = 54$, $B_1C_1 = 54$.

6.6*. Пусть точки P и Q — середины сторон AB и AC треугольника ABC, соответственно. Докажите, что $\Delta ABC \backsim \Delta APQ$.

6



7



ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ И ИХ СВОЙСТВА

Изучим свойства подобия треугольников – самых простых многоугольников.

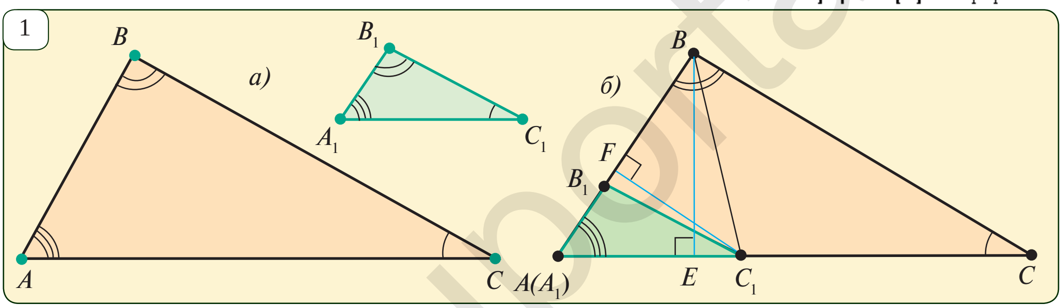
Теорема. ***Отношение периметров двух подобных треугольников равно коэффициенту подобия.***

Докажите эту теорему самостоятельно.

Теорема. ***Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.***

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ (*рис.1.а*), *k — коэффициент подобия* ⇒ $S_{ABC} : S_{A_1B_1C_1} = k^2$

Доказательство. По условию теоремы, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. Значит, согласно определению подобия многоугольников, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k$



Пользуясь тем, что $\angle A = \angle A_1$, наложим их друг на друга, как показано на *рис.*1.*б* и выполним соответствующие построения.

Найдем площади следующих треугольников и рассмотрим их отношения:

$$\left.\begin{array}{l} S_{ABC} = \dfrac{AC \cdot BE}{2}; \\ S_{ABC_1} = \dfrac{A_1C_1 \cdot BE}{2}; \end{array}\right] \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ABC_1}} = \frac{AC}{A_1C_1} \quad (1),$$

$$\left.\begin{array}{l} S_{A_1B_1C_1} = \dfrac{A_1B_1 \cdot C_1F}{2}; \\ S_{ABC_1} = \dfrac{AB \cdot C_1F}{2}; \end{array}\right] \Rightarrow \frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC_1}} = \frac{A_1B_1}{AB} \quad (2).$$

Разделив равенство (1) на равенство (2) почленно, получим равенство для отношения площадей треугольников с равными углами.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1} \quad (3)$$

Учитывая, что по условию, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k$, то получим равенство

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1} \cdot \frac{AC}{A_1C_1} = k \cdot k = k^2$$

Теорема доказана.

Задача 1. Докажите, что отношение сходственных сторон подобных треугольников равно отношению опущенных на эти стороны высот (*рис.*2).

$\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1,\ BD, B_1D_1 —$ *высоты* $\Rightarrow$ $\dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{BD}{B_1D_1}$

Решение Пусть коэффициент подобия данных треугольников равен k. Тогда, $AC : A_1C_1 = k$; $\quad S_{ABC} : S_{A_1B_1C_1} = k^2 \quad (1)$

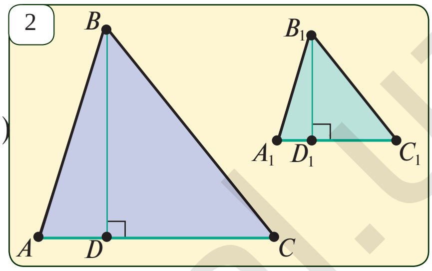
С другой стороны,

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{\frac{1}{2}AC \cdot BD}{\frac{1}{2}A_1C_1 \cdot B_1D_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \cdot \frac{BD}{B_1D_1} = k \cdot \frac{BD}{B_1D_1}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) получим $k \cdot \dfrac{BD}{B_1D_1} = k^2$ или $\dfrac{BD}{B_1D_1} = k$.

Таким образом, отношения $\dfrac{BD}{B_1D_1}$ и $\dfrac{AC}{A_1C_1}$ равны k, то есть $\dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{BD}{B_1D_1}$.

2



Задачи и задания.

7.1. Сформулируйте и докажите теорему об отношении площадей подобных треугольников.

7.2. Даны два подобных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ Найдите коэффициент подобия, если $S_{ABC} = 25$ *см*^{2} и $S_{A_1B_1C_1} = 81$ *см*^{2}.

7.3. Площади двух подобных треугольников равны соответственно 65 *м*^{2} и 260 *м*^{2}. Найдите сторону второго треугольника, если сходственная ей сторона первого треугольника равна 6 м.

7.4. Стороны данного треугольника равны соответственно 15 *см*, 25 *см* и 30 *см*. Найдите стороны треугольника, подобного данному, если его периметр равен 35 *см*.

7.5. Стороны данного треугольника равны соответственно 12 *см*, 20 *см* и 13 *см*. Найдите стороны треугольника, подобного данному, если меньшая его сторона равна 9 *см*.

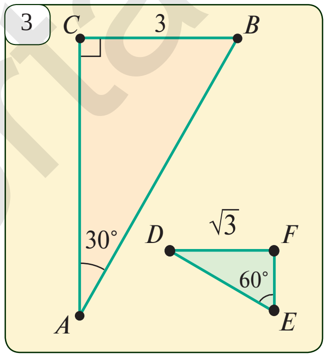
7.6. Пусть $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$ а сходственные стороны этих треугольников относятся как 7:5. Найдите площади треугольников, если площадь треугольника ABC на 36 м^2 больше площади треугольника $A_1B_1C_1$.

7.7. Будут ли подобными треугольники на (рис.3)

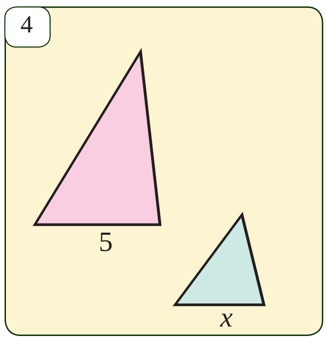
7.8. Треугольники на рис.4 подобны, причем отношение их площадей равно 25:9. Найдите неизвестную длину сторону.

7.9. Треугольники на рис.5 подобны, причем $S_1 : S_2 = 49:25$. Найдите неизвестную сторону.

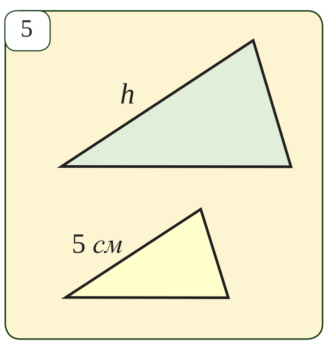
3



4



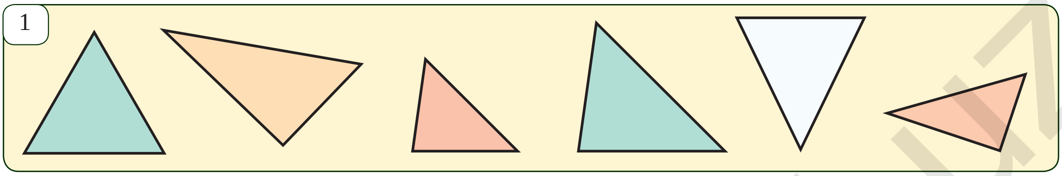
5



8 ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Активизирующее упражнение

Среди треугольников, изображенных на рис. 1, найдите подобные треугольники. На каком основании вы сделали такое заключение?

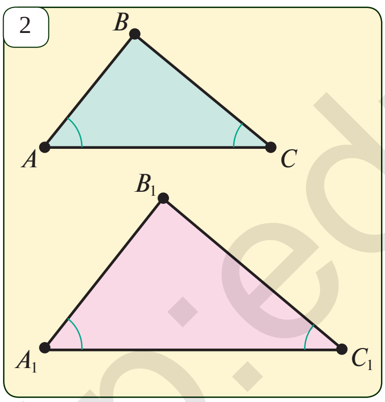


1

Согласно определению, для установления подобия двух треугольников нужно убедиться в равенстве их углов и пропорциональности сходственных сторон. Для треугольников эта проверка намного упрощается. Ниже приводятся соответствующие этому теоремы, называемые "признаками подобия треугольников".

Теорема. *(Признак УУ подобия треугольников).* ***Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то треугольники подобны (рис. 2).***

$\Delta ABC,\ \Delta A_1B_1C_1,\ \angle A=\angle A_1,\ \angle C=\angle C_1 \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$



2

Доказательство. 1. Согласно теореме о сумме углов треугольника.

$$\left.\begin{array}{l}\angle B=180^\circ-(\angle A+\angle B),\\ \angle B_1=180^\circ-(\angle A_1+\angle C_1)\end{array}\right\} \Rightarrow \angle B=\angle B_1$$

Значит, углы треугольника ABC соответственно равны углам треугольника $A_1B_1C_1$.

2. По условию, $\angle A=\angle A_1$, $\angle C=\angle C_1$. Согласно теореме об отношении площадей треугольников с равными углами,

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}=\frac{AB\cdot AC}{A_1B_1\cdot A_1C_1} \qquad \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}=\frac{CA\cdot CB}{C_1A_1\cdot C_1B_1}$$

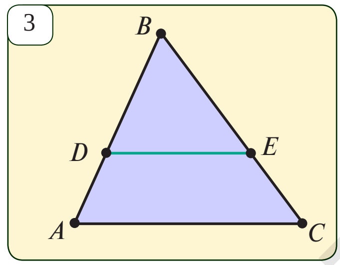
Приравняв правые части этих равенств и сократив равные члены, получим, $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}$. Аналогично, исходя из равенства, $\angle A=\angle A_1$ и $\angle B=\angle B_1$ придем к равенству, $\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CA}{C_1A_1}$. Таким образом, углы треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно равны, а их сходственные стороны пропорциональны, т. е. эти треугольники подобны. *Теорема доказана.*

Задача. Докажите, что прямая DE пересекающая две стороны треугольника ABC параллельная третьей его стороне, отсекает от него треугольник, подобный данному *(рис.3)*.

Доказательство. У треугольников ABC и DBE угол $\angle B$ — общий, $\angle CAB = \angle EDB$ (так как равны соответствующие углы, образованные при пересечении параллельных прямых AC, DE и секущей AB) *(рис 3)*.

Следовательно, по признаку УУ подобия треугольников, $\Delta ABC \backsim \Delta DBE$.

3



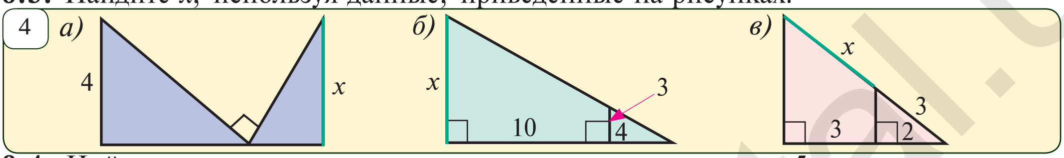
Задачи и задания.

8.1. Сравните определение подобия треугольников и признак УУ.

8.2. Докажите признак УУ подобия треугольников.

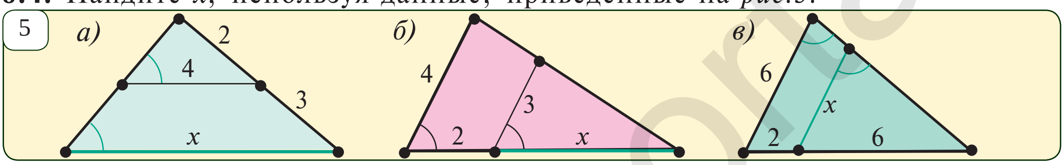
8.3. Найдите x, используя данные, приведенные на рисунках.

4



8.4. Найдите x, используя данные, приведенные на *рис*.5.

5



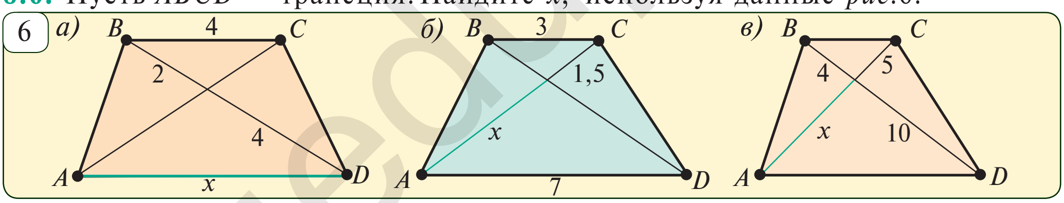
8.5. Пусть на стороне CD параллелограмма $ABCD$ отмечена точка E так, что лучи AE и BC пересекаются в точке F. Найдите:

а) EF и FC, если $DE = 8$ *см*, $EC = 4$ *см*, $BC = 7$ *см*, $AE = 10$ *см*;

б) DE и EC, если $AB = 8$ *см*, $AD = 5$ *см*, $CF = 2$ *см*.

8.6. Пусть $ABCD$ — трапеция. Найдите x, используя данные *рис*.6.

6



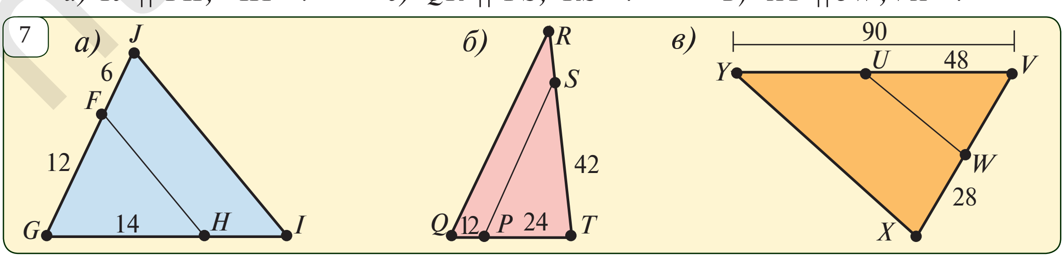
8.7*. Докажите подобие прямоугольных треугольников, имеющих по одному равному острому углу.

8.8*. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D. Докажите подобие треугольников ABC и BDC, если $ABC = BDC$. Найдите сторону AC, если $3AB = 4BD$ и $BC = 9$ см.

8.9. Найдите неизвестное, используя данные, приведенные на *рис*.7.

а) $IJ \parallel FH$, HI *-?* *б)* $QR \parallel PS$, RS *-?* в) $XY \parallel UW$, VX *-?*

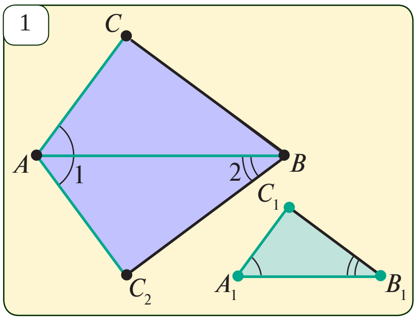
7



9 ВТОРОЙ ПРИЗНАК ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Теорема. *(Признак СУС подобия треугольников)*. ***Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны** (рис.1)*.

$\Delta ABC,\ \Delta A_1B_1C_1,\ \angle A=\angle A_1,\ \dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{AC}{A_1C_1}$ $\Rightarrow$ $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

1


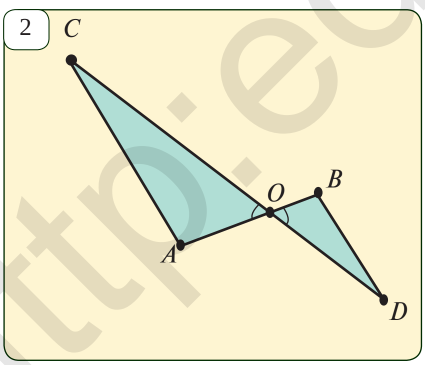
Построим треугольник ABC_2 у которого $\angle 1 = \angle A_1$, $\angle 2 = \angle B_1$ (рис.1). Он подобен треугольнику $A_1B_1C_1$ по признаку УУ подобия треугольников.

$$\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC_2:\ \frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC_2}{A_1C_1}$$

Из условия: $$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$$

Из этих двух равенств следует, что $AC_2 = AC$. Тогда по признаку СУС равенства треугольников $\Delta ABC = \Delta ABC_2$. В частности, $\angle 2 = \angle B$. По построению $\angle 2 = \angle B_1$. Значит, $\angle B = \angle B_1$. В таком случае $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$, поэтому по признаку УУ подобия треугольников $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. *Теорема доказана.*

Задача. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O (*рис.* 2). Найдите отношение площадей треугольников AOC и BOD, если $AO = 12$ *см*, $BO = 4$ *см*, $CO = 30$ *см*, $DO = 10$ *см*.

2


Решение. По условию,

$$\left.\begin{aligned}\frac{OA}{OB}&=\frac{12}{4}=3\\ \frac{OC}{OD}&=\frac{30}{10}=3\end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=3.$$

Следовательно, две стороны треугольника AOC пропорциональны двум сторонам треугольника BOD и углы, заключенные между этими сторонами, равны как вертикальные: $\angle AOC = \angle BOD$.

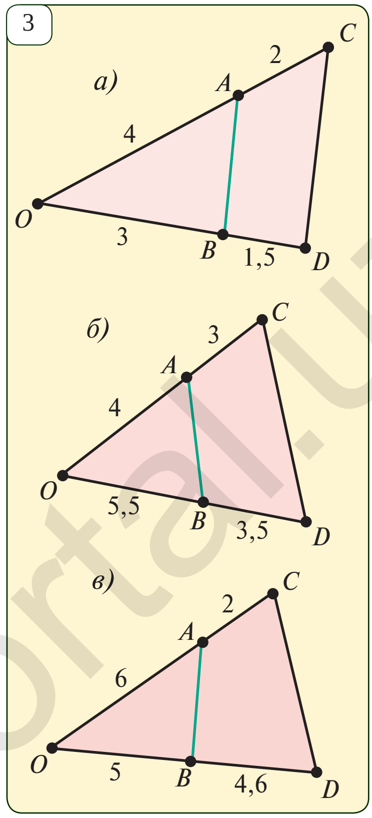
Поэтому, по признаку СУС подобия $\Delta AOC \sim \Delta BOD$ и коэффициент подобия $k=\dfrac{OA}{OB}=3$. Применим теперь теорему об отношении площадей подобных треугольников: $\dfrac{S_{AOC}}{S_{BOD}}=k^2=9$. *Ответ:* 9

Задачи и задания.

9.1. Сравните определение подобия и признак СУС.

9.2. Используя признаки подобия: а) УУ; б) СУС, докажите подобие равнобедренных треугольников с равными углами при вершинах.

9.3. Будут ли подобными треугольники OAB и OCD, изображенные на рис.3? Если подобны, то найти отношение периметров этих треугольников.



9.4. Найдите отрезок CD и отношение площадей треугольников AOB и COD, если лучи AC и BD пересекаются в точке O и $AO: CO = BO: DO = 3$, $AB = 7$ *см*.

9.5. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $AB : A_1B_1 = AC : A_1C_1 = 4 : 3$. Найдите:

а) Стороны AB и A_1B_1, если отрезок AB больше A_1B_1 на 5 *см*.

б) Стороны AB и A_1B_1, если отрезок AB больше A_1B_1 на 6 *см*.

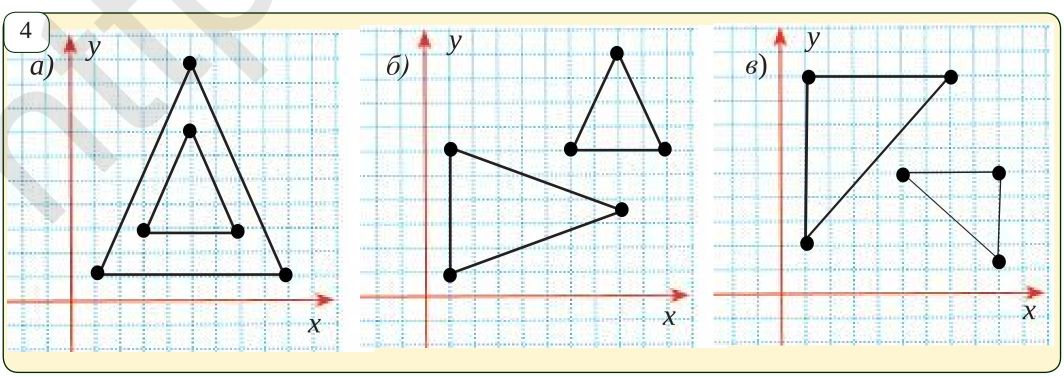
в) Площадь каждого треугольника, если сумма площадей этих треугольников равна 400 *см*^{2}.

9.6. Докажите, что если два катета одного прямоугольного треугольника пропорциональны двум сходственным катетам другого прямоугольного треугольника, то эти треугольники подобны.

9.7. Докажите подобие двух прямоугольных треугольников, если катеты одного из них равны 3 и 4 *дм*, а катет и гипотенуза второго равны 8 *дм* и 10 *дм* соответственно.

9.8*. Отрезок AB и прямая l пересекаются в точке O. На прямую l опущены перпендикуляры AA_1 и BB_1. Найдите отрезки BB_1, OA и AB, если $AA_1 = 2$ *см*, $OA_1 = 4$ *см* и $OB_1 = 3$ *см*.

9.9*. На основании данных *рис.*4 обоснуйте подобие треугольников.

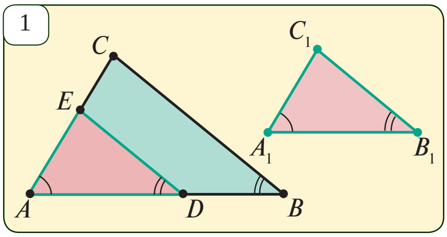


10 ТРЕТИЙ ПРИЗНАК ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Теорема. *(Признак ССС подобия треугольников).* ***Если три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны.***

$\Delta ABC, \Delta A_1B_1C_1, \ \dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{CA}{C_1A_1}$ *(рис.1)* $\Rightarrow$ $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

1



Доказательство. На стороне AB треугольника ABC отметим точку D так, чтобы $AD = A_1B_1$. Пусть прямая, проведенная через точку D параллельно прямой BC пересекает сторону AC в точке E. По признаку подобия УУ, ΔADE и ΔABC будут подобны. Следовательно, по условию теоремы, получим равенства:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} \text{ и } \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}, \quad (1) \qquad \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \text{ и } \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}. \quad (2)$$

Учитывая $AD = A_1B_1$, из первого равенства получим $B_1C_1 = DE$, а из второго – $A_1C_1 = AE$. Таким образом, по признаку CCC равенства треугольников $\Delta ADE = \Delta A_1B_1C_1$. Тогда $\Delta ADE \sim \Delta ABC$. Значит, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. *Теорема доказана.*

Задача. Докажите, что если у двух равнобедренных треугольников основание и боковая сторона одного из них пропорциональны основанию и боковой стороне другого, то такие треугольники подобны.

$\Delta ABC, \ AB = BC, \ \Delta A_1B_1C_1, \ A_1B_1 = B_1C_1, \ \Big| \ \dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$ $\Rightarrow$ $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

Доказательство. Из равенств $AB=BC$, $A_1B_1=B_1C_1$ и отношения $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$ получим $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1}$. Значит, по признаку CCC подобия треугольников $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Задачи и задания.

10.1. Приведите признак ССС подобия треугольников и докажите его.

10.2. Известно, что $AC=14$ *см*, $AB=11$ *см*, $BC=13$ *см*, $A_1C_1=28$ *см*, $A_1B_1=22$ *см*, $B_1C_1=26$ *см*. Будут ли треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобными?

10.3. Укажите на *рис.* 2 все пары подобных треугольников.

10.4. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E. Найдите площадь треугольника AED, если $AB=5$ *см*, $BC=10$ *см*, $CD=6$ *см*, $AD=15$ *см*.

10.5. Основания трапеции 6 *см* и 9 *см*, высота 10 *см*. Найдите расстояния от точки пересечения диагоналей трапеции до ее оснований.

10.6. Докажите, что любые два правильных треугольника подобны.

10.7. В равнобедренный треугольник с основанием 12 *см* и высотой 8 *см* вписан квадрат так, что две его вершины лежат на основании треугольника, а две оставшиеся – на его боковых сторонах. Найдите сторону квадрата.

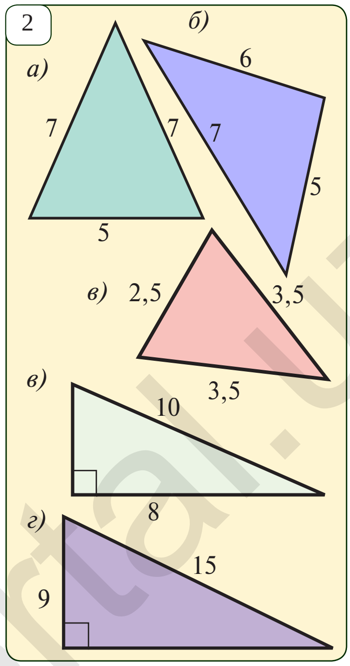
10.8*. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C$.

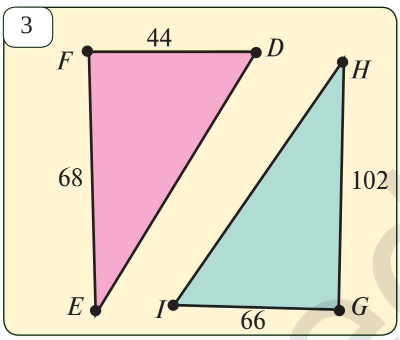
10.9. Площади двух подобных треугольников равны 6 и 24. Периметр одного из них больше периметра другого на 6. Найдите периметр большего треугольника.

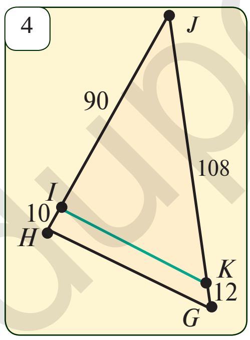
10.10. На основании какого признака треугольники, изображенные на *рис*.3, подобны?

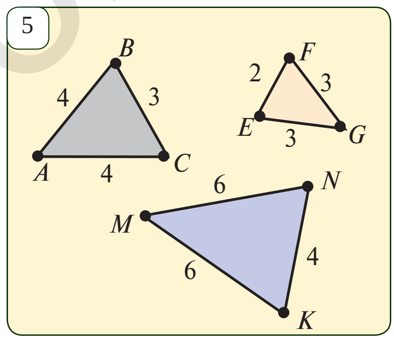
10.11. На основании какого признака треугольники JKI и JGH, изображенные на *рис*.4, подобны?

10.12. Какие треугольники, изображенные на *рис*.5, подобны друг другу?

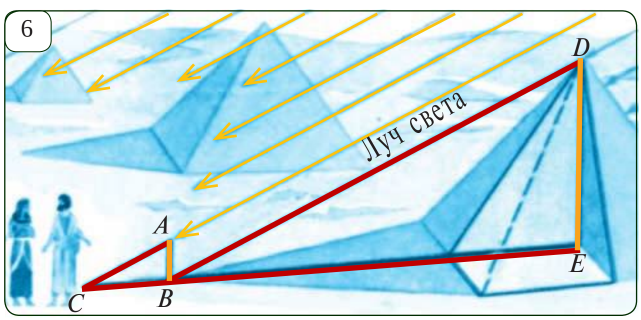








Исторические этюды. Это событие относится к VI в. до н.э. В это время древние греки практически не занимались геометрией. Древнегреческий философ Фалес посетил Египет для ознакомления с египетской наукой. Египтяне предложили ему трудную задачу: как найти высоту одной из гигантских пирамид? Фалес предложил простое и изящное решение этой задачи. Он вбил в землю колышек и сказал: "Когда длина тени этого колышка станет равной его высоте, тогда и длина тени пирамиды сравняется с ее высотой". Попытайтесь обосновать решение Фалеса!



11 ПРИЗНАКИ ПОДОБИЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Вы знаете, что один из углов прямоугольных треугольников является прямым углом. Поэтому признаки подобия таких треугольников формулируются гораздо проще, чем в общем случае.

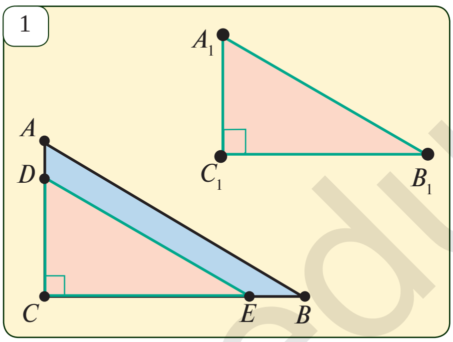
Теорема 1. ***Если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого, то такие прямоугольные треугольники подобны***

Теорема 2. ***Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно пропорциональны катетам другого, то такие прямоугольные треугольники подобны.***

Теорема 3. ***Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно пропорциональны гипотенузе и катету другого, то такие прямоугольные треугольники подобны.***

Справедливость первых двух признаков очевидна. Докажем третий признак.

$\Delta ABC, \Delta A_1B_1C_1,\ \angle C=90^\circ, \angle C_1=90^\circ,\quad \dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}$ $\Rightarrow$ $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$



Доказательство. Отложим на стороне BC треугольника ABC отрезок CE такой, что $CE=C_1B_1$ и проведем $DE \parallel AB$ (*рис.*1). Тогда по признаку УУ подобия треугольников треугольники ΔDEC и ΔABC подобны. Из пропорциональности сходственных сторон треугольников имеем: $\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{CB}{CE}$.

По построению, $CE=C_1B_1$. Тогда справедливо равенство, $\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{CB}{C_1B_1}$. (1)

С другой стороны, по условию теоремы $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{CB}{C_1B_1}$. (2)

Из равенств (1) и (2) следует, что $DE=A_1B_1$.

Рассмотрим треугольники $A_1B_1C_1$ и DEC: В них: 1. $CE=C_1B_1$ (по построению); 2. $DE=A_1B_1$ (по доказанному).

По признаку равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и одному из катетов, $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta DEC$.

Однако, $\Delta ABC \sim \Delta DEC$. Тогда, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Теорема доказана.

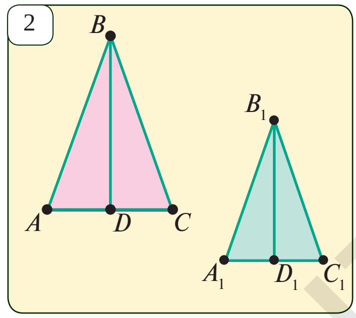
Задача. Докажите, что если у двух равнобедренных треугольников боковые стороны и высоты, опущенные на основания, пропорциональны, то такие треугольники подобны (*рис.*2)

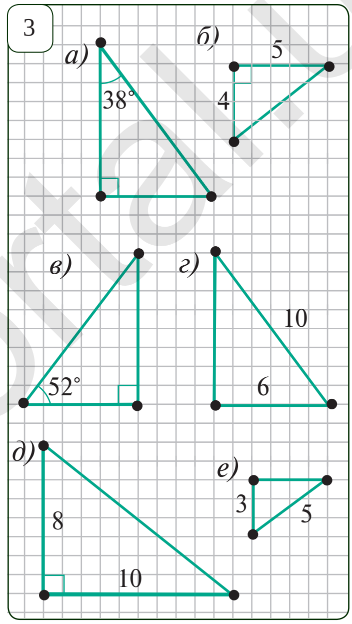
Доказательство. Рассмотрим прямоугольные треугольники ABD и $A_1B_1D_1$. По условию, их гипотенузы и по одному катету взаимно пропорциональны.

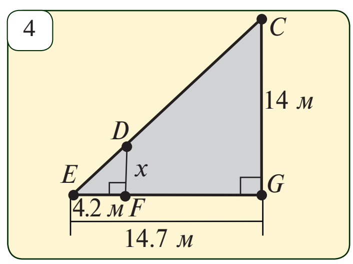
Значит, по теореме 3 $\Delta ABD \sim \Delta A_1B_1D_1$. Отсюда следует, что $\angle DBA = \angle D_1B_1A_1$. Учитывая то, что высота равнобедренного треугольника, опущенная на основание является также и биссектрисой, получим, $\angle B = 2\angle DBA = 2\angle D_1B_1A_1 = \angle B_1$.

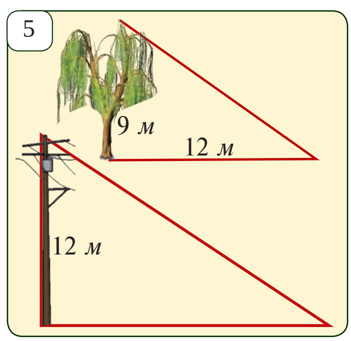
Итак, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ имеют место равенства $\angle B = \angle B_1$ и $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1}$.

Тогда по признаку СУС подобия треугольников $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. Утверждение доказано.









Задачи и задания.

11.1. Найдите на *рис.*3 подобные треугольники.

11.2. Один из катетов треугольника, подобного прямоугольному треугольнику с катетами 3 *м* и 4 *м*, равен 27 *м*. Скольким метрам равен второй катет?

11.3. Площади двух подобных прямоугольных треугольников равны 21 $м^2$ и 84 $м^2$. Найдите катеты второго треугольника, если один из катетов первого равен 6 *м*.

11.4. В окружность вписаны два подобных прямоугольных треугольника. Докажите, что эти треугольники равны.

11.5*. В прямоугольный треугольник с катетами 10 *см* и 12 *см* вписан квадрат, имеющий с треугольником общий угол. Найдите сторону квадрата, если одна из его вершин лежит на гипотенузе.

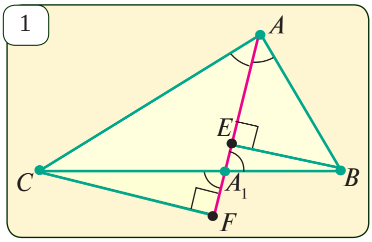
11.6*. Задан треугольник ABC. Ромб $ADEF$ вписан в него так, что точки D, E и F лежат на сторонах треугольника AB, BC и CA соответственно. Найдите сторону ромба, если $AB = c$, $AC = b$.

11.7. На основании данных рис.4 найдите неизвестную длину отрезка.

11.8. Высота дерева равна 9 *м*, а высота столба равна 12 *м*. Найдите длину тени столба, если длина тени дерева равна 12 *м*.

11.9. Высота гранатового дерева равна 3 *м*. К вечеру длина его тени становится равной 6 *м*. Какую тень образует в это время яблоня высотой 4,2 *м*?

ПРИЛОЖЕНИЯ ПРИЗНАКОВ ПОДОБИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО



1

Задача 1. Докажите, что биссектриса угла треугольника делит противолежащую этому углу сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам.

ΔABC, AA_1 – биссектриса (*рис.* 1) $\Rightarrow$ $\dfrac{AB}{A_1B}=\dfrac{AC}{A_1C}$

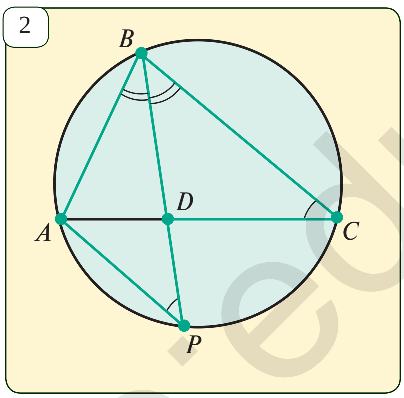
Решение Опустим перпендикуляры BE и CF на прямую AA_1 . Так как $\angle CAF=\angle BAE$ то треугольники CAF и BAE подобны. Из пропорциональности сходственных сторон подобных треугольников следует:

$$\Delta CAF \backsim \Delta BAE \Rightarrow \frac{AC}{AB}=\frac{CF}{BE} . \qquad (1)$$

Аналогично $$\Delta CA_1F \backsim \Delta BA_1E \Rightarrow \frac{A_1C}{A_1B}=\frac{CF}{BE} . \qquad (2)$$

Сравнивая равенства (1) и (2) получим, $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{CA_1}{BA_1}$ или $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{CA_1}{BA_1}$

Это означает, что отрезки A_1B и A_1C пропорциональны отрезкам AB и AC.



2

Задача 2 Биссектриса BD угла ABC BC пересекает описанную около треугольника окружность в точках B и P. Докажите, что $\Delta ABP \backsim \Delta BDC$ (*рис.*2).

Решение. В ΔABP и $\angle BDC$:

1. $\angle DBC=\angle ABP \Leftarrow$ по условию;

2. $\angle DCB=\angle APB \Leftarrow$ как опирающиеся на одну дугу.

Значит, по признаку УУ подобия треугольников, $\Delta ABP \backsim \Delta BDC$.

Задачи и задания.

12.1. Выпишите условие, означающее пропорциональность частей, на которые делит биссектриса угла треугольника противолежащую этому углу сторону прилежащим сторонам.

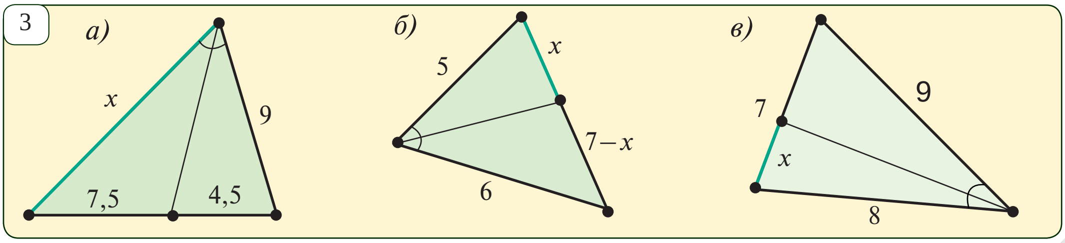
12.2. Из вершины прямого угла C, прямоугольного треуглника опущена высота CD. Доказать, что $\angle ACD=\angle CBD$. Сколько подобных треугольников вы можете указать?

12.3. Найдите x по данным на *рис.*3.

12.4. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Найдите стороны AB и AC, если CD = 4,5 *м*, BD = 13,5 *м*, а периметр треугольника ABC равен 42 *м*.

12.5. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке N. Найдите площадь

3



треугольника ANB, если площадь треугольника ABC равна 87 $дм^2$.

12.6. Расстояния от точки N пересечения медиан треугольника ABC до сторон AB и BC равны 3 *дм* и 4 *дм* соответственно. Найдите сторону BC, если $AB = 8$ *дм*.

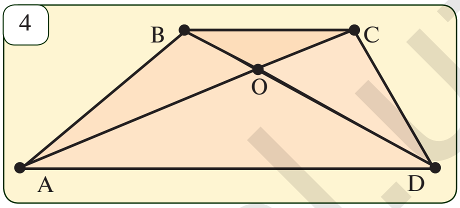
12.7*. Известно, что прямая, параллельная основанию трапеции, делит одну из ее боковых сторон в отношении $m:n$. В каком отношении делит эта прямая вторую боковую сторону трапеции?

12.8. На *рис.*4 изображена трапеция. Докажите подобие треугольников AOD и COB.

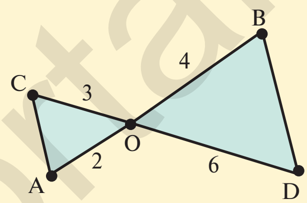
12.9. Докажите подобие треугольников AOC и DOB (*рис.*5)

12.10. Подобны ли треугольники на *рис.*6?

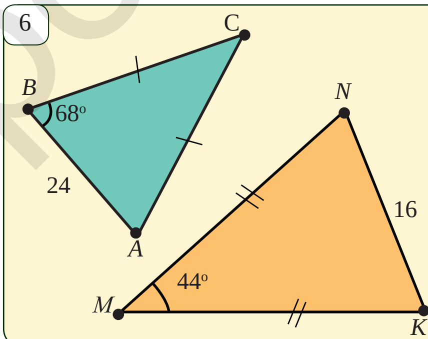
4



5



6

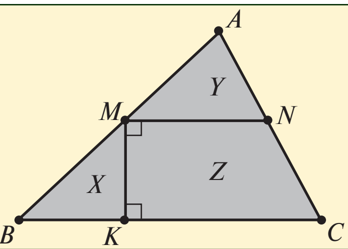


Занимательные задачи

Геометрия по-английски. Попробуйте решить задачу, условие которой дано на английском. Тем самым вы будете иметь возможность проверить свои возможности как по геометрии, так и по английскому языку.

1) *Dissection Puzzle:* Let M be the midpoint of the side AB of a given triangle ABC. The triangle has been dissected into parts X, Y, Z along the lines MN and MK passing through M such that MN is parallel while MK is perpendikular to the base BC (*picture* 7). Show how the three pieces can be fitted together to make a rectangle, respectively two different parallelograms.

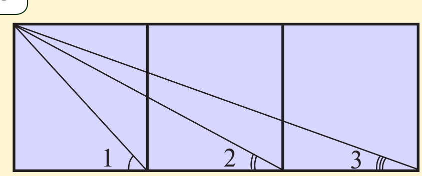
7



2) Look at the picture 8 and prove that

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 90°.$$

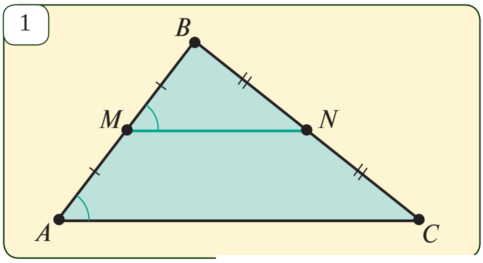
8



13 ПРАКТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Задача 1. Используя подобие треугольников, докажите, что средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

ΔABC, MN — *средняя линия* (*рис.*1): $MA=MB, NC=NB$ ⇒ $MN \parallel AC,\ MN=\frac{1}{2}AC$



Решение. Для ΔABC и ΔMBN:

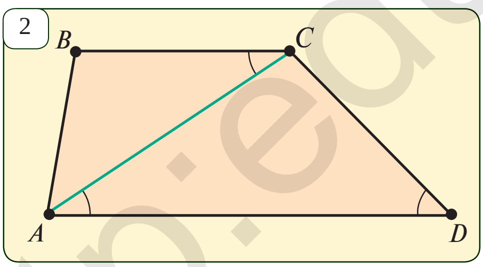
B — общий угол, $\frac{BM}{AB}=\frac{BN}{BC}=\frac{1}{2}$.

Из этого следует, что по признаку СУС подобия треугольников эти треугольники подобны. Продолжим наши рассуждения следующим образом:

$$\Delta MBN \backsim \Delta ABC \Rightarrow \begin{cases} \angle BMN=\angle A, \\ \frac{MN}{AC}=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MN \parallel AC, \\ MN=\frac{1}{2}AC. \end{cases}$$

Задача 2. Докажите, что если BC и AD — основания трапеции $ABCD$, а AC — диагональ, разбивающая трапецию на два подобных треугольника, то $AC^2=BC\cdot AD$.

$ABCD$ — *трапеция*, $BC \parallel AD$, $\Delta ABC \backsim \Delta DCA$ (*Рис.* 2) ⇒ $AC^2=BC\cdot AD$



Решение. **1-й шаг.** Сравним углы треугольников ABC и ACD. $\angle ACB=\angle CAD$, так как они внутренне накрест лежащие углы. $\angle B\neq\angle D$, так как $ABCD$ — трапеция (иначе $\angle D+\angle A=\angle B+\angle A=180°$, то есть в этом случае $AB \parallel CD$ и $ABCD$ не будет трапецией). Тогда $\angle D=\angle BAC$ и $\angle ACD=\angle B$.

2-й шаг. Запишем отношение сходственных сторон подобных треугольников ABC и DCA: $\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{AC}$. Отсюда $AC^2=BC\cdot AD$.

Задачи и задания.

13.1. а) Найдите длину тени телеграфного столба высотой 5,4 *м*, если человек ростом 170 см отбрасывает тень длиной 1 *м*;

б) Углы при вершинах двух равнобедренных треугольников равны. Найдите длину боковой стороны второго треугольника, если длины оснований треугольников равны 10 *см* и 8 *см*, а длина боковой стороны первого треугольника - 17 *см*.

13.2. Укажите подобные треугольники на каждом из чертежей *рис.* 3.

13.3. Пусть AP - медиана ABC. Докажите, что она делит пополам каждый отрезок, параллельный BC, концы которого лежат на сторонах AB и AC.

13.4. Докажите, что вершины треугольника находятся на равных расстояниях от прямой, на которой лежит его средняя линия.

13.5. Диагонали вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что $\Delta AOB \backsim \Delta COD$.

13.6. Во внутренней области треугольника ABC отмечена точка O, а на лучах OA, OB, OC – точки E, F, K соответственно (*рис.* 4). Докажите, что треугольники ABC и EFK подобны, если $AB||EF$ и $BC||FK$.

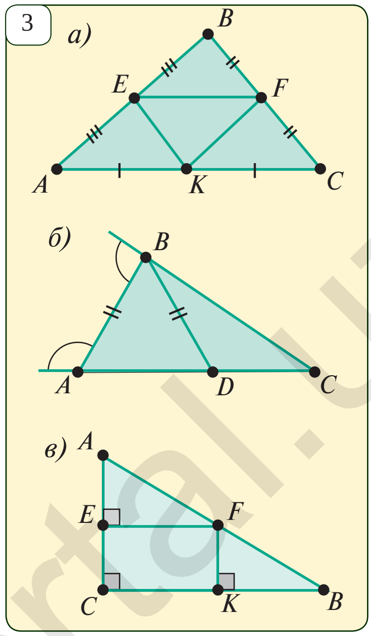
13.7*. Точка пересечения диагоналей трапеции лежит на прямой, делящей одно из ее оснований в отношении $m:n$. В каком отношении делит эта прямая второе основание трапеции?

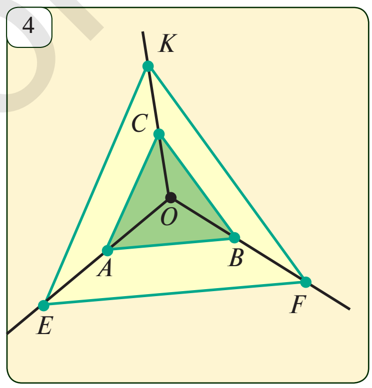
13.8. Найдите площадь области, обозначенной на *рис.* 5 через x, если площадь треугольника ABC равна S.

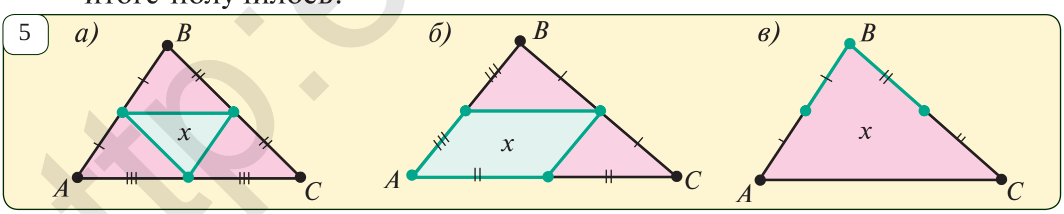
13.9. На *рис.*6 $EQ \parallel BC$. Найдите AQ.

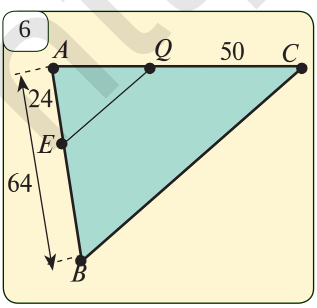
13.10. На *рис.*7 $AB \parallel EC$. Найдите QC.

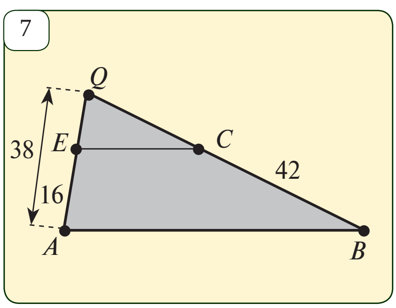
13.11. На *рис.*8 проведены высоты треугольника ABC. Сколько подобных треугольников в итоге получилось?

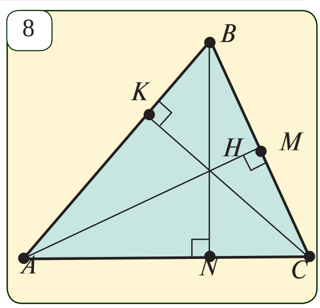








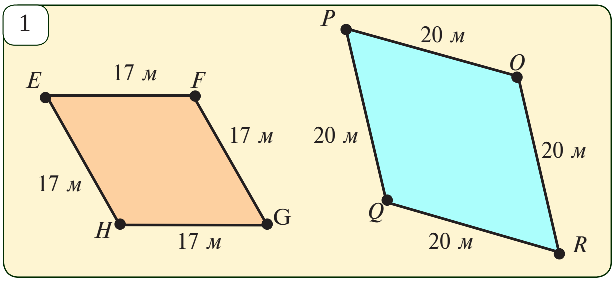


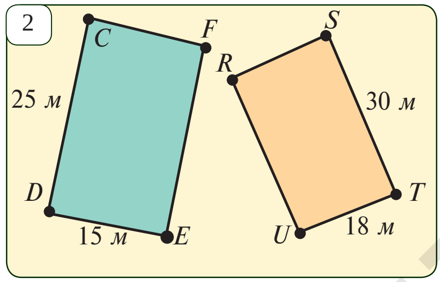


14 ПРОВЕРЬТЕ СВОИ ЗНАНИЯ

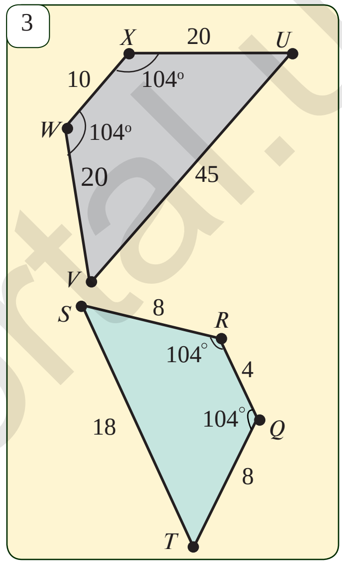
I. Тесты

1. Какое из определений верно?
A) Два треугольника называются подобными, если их углы соответственно равны.
B) Два треугольника называются подобными, если их сходственные стороны равны.
C) Два треугольника называются подобными, если их сходственные стороны пропорциональны и соответствующие углы равны.
D) Два треугольника называются подобными, если их сходственные стороны и соответствующие углы равны.
2. Чему равно отношение площадей двух подобных треугольников?
A) Коэффициенту подобия.
B) Отношению их соответственных сторон.
C) Отношению их периметров.
D) Квадрату коэффициента подобия.
3. Какое из следующих утверждений верно?
A) Треугольники будут подобными, если два угла одного треугольника равны двум углам другого.
B) Треугольники будут подобными, если две стороны одного треугольника равны двум сторонам другого.
C) Треугольники будут подобными, если они имеют по одному равному углу и по две пропорциональные стороны.
D) Треугольники будут подобными, если они имеют по одному равному углу и по одной пропорциональной стороне.
4. Найдите верное утверждение.
Если два треугольника подобны, то их...
A) высоты равны. B) стороны пропорциональны.
C) стороны равны. D) площади равны.
5. Чему равно отношение периметров подобных треугольников?
A) Квадрату отношения сходственных сторон.
B) Коэффициенту подобия.
C) Квадрату коэффициента подобия.
D) Отношению площадей.
6. Где на *рис.*1 верно указаны подобные ромбы?
A) $EHGF \backsim PQRO$; B) $HGFE \backsim PQRO$;
C) $GFEH \backsim QROP$; D) $EHGF \backsim QROP$.
7. Подобны ли многоугольники на рис.2? Почему?
A) Да, так как у этих многоугольников соответствующие углы равны, а сходственные стороны пропорциональны.
B) Да, так как у этих многоугольников соответствующие углы пропорциональны, а сходственные стороны равны.
C) Да, так как у этих многоугольников соответствующие углы равны.
D) Да, так как у этих многоугольников сходственные стороны пропорциональны.





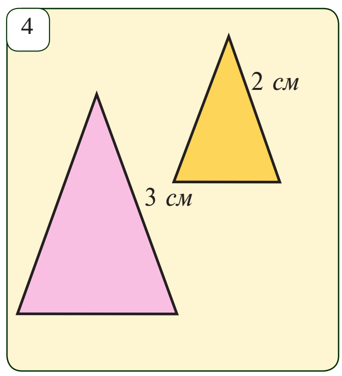
8. Подобны ли трапеции $SRQT$ и $VWXU$, указанные на рис.3? В случае подобия, найдите коэффициент подобия.
A) Да, $k = 0,4$; B) Да, $k = 0,5$;
C) Да, $k = 0,8$; D) Нет.



9. Сходственные стороны подобных треугольников равны 4 *см* и 13 *см*. Пусть площадь первого треугольника равна 16 *см*^{2}. Найдите площадь второго треугольника.
A) 169 см^2; B) 16 см^2;
C) 52 см^2; D) 189 см^2;

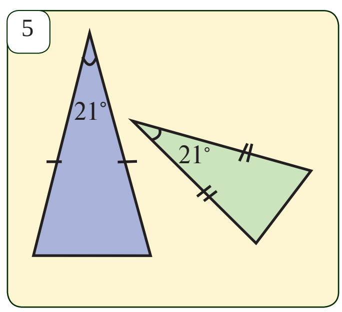
10. Отношение площадей двух подобных треугольников равно 144. Чему равно отношение сходственных сторон?
A) 13; B) 12;
C) 14; D) 16;

11. На рис.4 изображены подобные треугольники. Используя величины, данные на рисунке, найдите отношение площади большего треугольника к площади меньшего.
A) 9:4; B) 3:2;
C) 4:9; D) 2:3;



12. Чему равен коэффициент подобия подобных треугольников, если отношение их площадей равно a?
A) $1:a^2$; B) a^2 ; C) $\sqrt{a}$; D) $1:a$;

13. Подобны ли треугольники на рис.5? Почему?
A) Да, так как у этих треугольников по две стороны пропорциональны, а углы между ними равны;
B) Нет, так как у этих треугольников два угла не равны;
C) Нет, так как у этих треугольников соответствующие углы не равны;
D) Нет, так как у этих треугольников сходственные стороны непропорциональны;



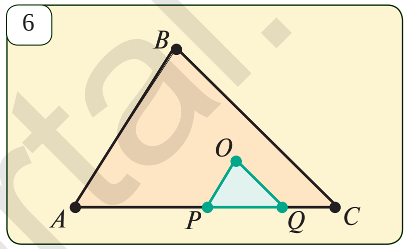
II. Задачи

1. Пусть E и F – середины сторон AB и AC треугольника ABC. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника AEF равна 3 *см*^{2}.

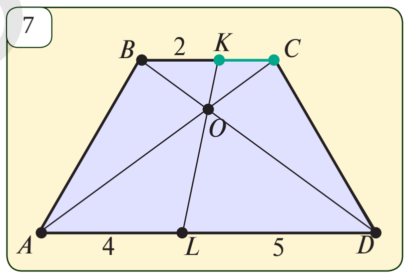
2. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC пересекает стороны AB и BC в точках N и P, соответственно. Найдите сторону BC, если $AN = 4$, $NB = 3$, $BP = 3{,}6$.

3. На стороне AB остроугольного треугольника ABC отмечена точка K. Найдите расстояние от точки K до стороны AC, если $AK=3$, $BK=2$, а высота BD равна 4.

4. Луч DK, проведенный из точки K – середины стороны BC параллелограмма $ABCD$, пересекается с лучом AB в точке F. Найдите периметр треугольника AFD, если $AD = 4$, $DK = 5$, и $DC = 5$.



5. Из внутренней точки O треугольника ABC – проведены прямые, параллельные сторонам AB и BC. Эти прямые пересекают сторону AC в точках P и Q соответственно. Найдите площадь треугольника POQ, если $PQ = 2$, $AC = 1$ и площадь треугольника ABC равна 98 (*рис.*6).

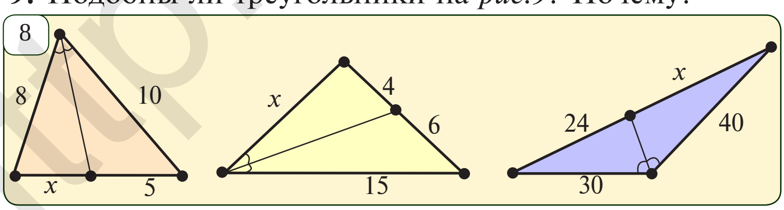


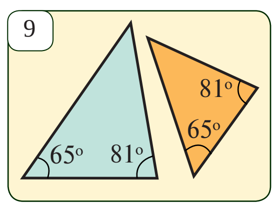
6. На основаниях BC и AD трапеции $ABCD$ отмечены точки K и L соответственно. Отрезок KL проходит через точку пересечения диагоналей. Найдите отрезок KC, если $AL = 4$, $LD = 5$ и $BK = 2$.

7. Пусть площади двух подобных треугольников равны 15 *мм*^{2} и 135 *мм*^{2}. Одна сторона первого треугольника равна 6 *мм*. Найдите сходственную ей сторону второго треугольника.

8. По данным *рис.*8 найдите неизвестную сторону.

9. Подобны ли треугольники на *рис.*9? Почему?

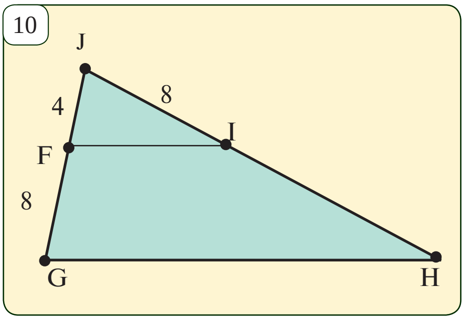


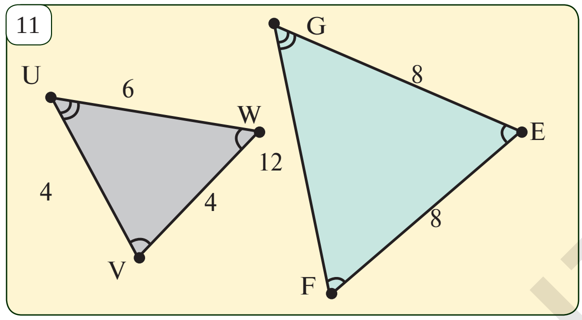


10. На *рис.* 10 $\Delta JIF \backsim \Delta HJG$. Найдите длину IH.

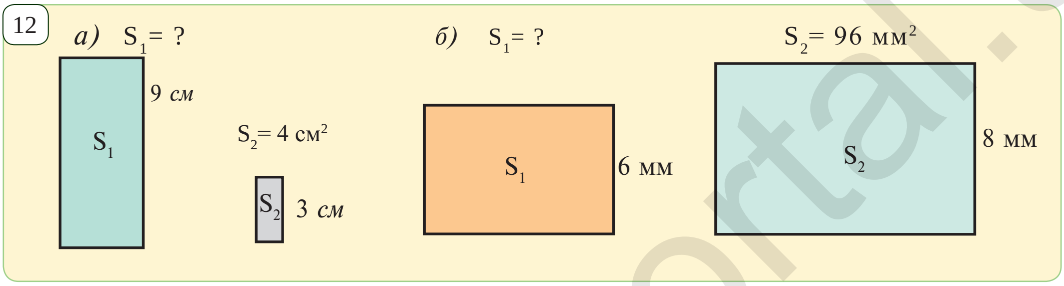
11. Подобны ли треугольники на *рис.*11? В случае подобия, найдите коэффициент подобия.

12. Пусть площади двух подобных треугольников равны 24 *мм*^{2} и 216 *мм*^{2}. Одна из высот первого треугольника равна 8 *мм*. Найдите соответствующую ей высоту второго треугольника.

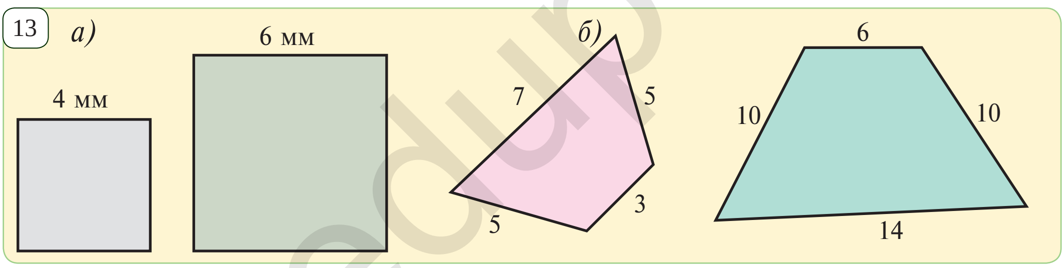




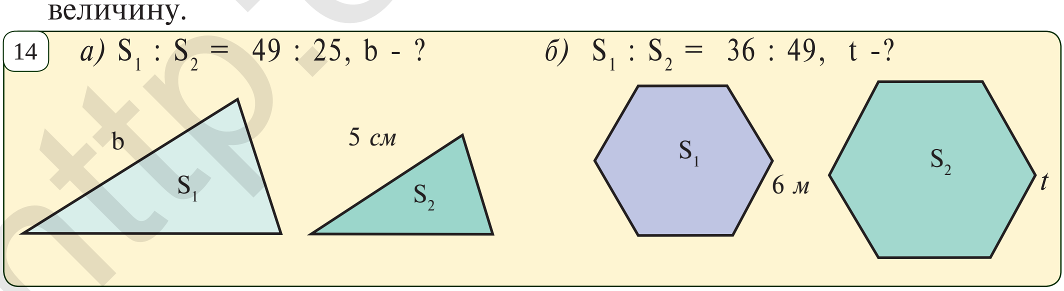
13. На *рис.*12 изображены подобные многоугольники. Найдите неизвестную величину.



14. На *рис.*13 изображены подобные многоугольники. Найдите коэффициент подобия.



15. На *рис.*14 изображены подобные многоугольники. Найдите неизвестную величину.

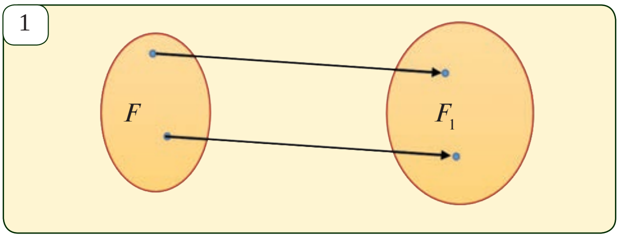


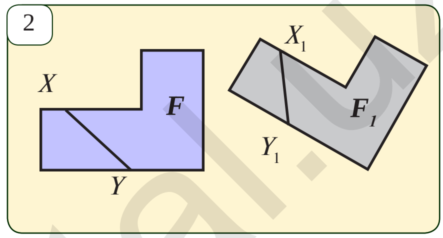
16. Тень от чинары равна 12 *м*. Тень от частного дома, стоящего рядом, равна 6 *м*. Если чинара выше дома на 16 *м*, найдите высоту дома.

17. Высота памятника равна 9 *м*, а тень от него равна 12 *м*. Тень от тополя, растущего рядом, равна 16 *м*. Найдите высоту тополя.

15 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ. ДВИЖЕНИЕ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС

Если каждую точку плоской фигуры F каким-то способом перенести, то получим новую фигуру F_1 (рис.1). Если при таком переносе (отображении) различные точки первой фигуры перейдут в различные точки второй фигуры (т.е. отображение является взаимно-однозначным), то такой перенос называется *геометрическим преобразованием*.





Если при преобразовании переносятся все точки плоскости, то говорят, что задано *отображение плоскости на себя*. Ниже мы рассмотрим некоторые геометрические преобразования.

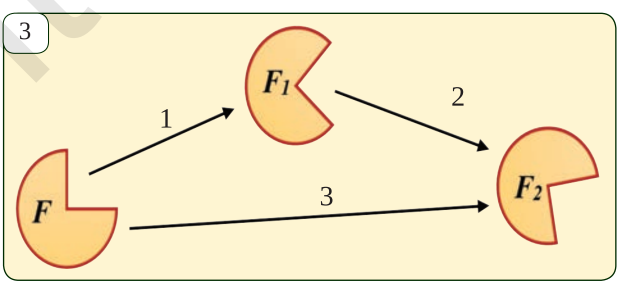
Преобразование, сохраняющее расстояние между точками называется *движением*. Согласно этому определению, если при преобразовании произвольные точки X и Y фигуры F переходят в какие-то точки X_1 и Y_1 фигуры F_1 и при этом выполнено равенство $XY = X_1Y_1$ (т.е. сохраняется расстояние), то такое преобразование будет движением (рис.2).

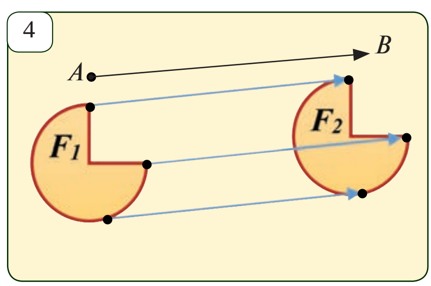
Движение обладает следующими свойствами:

Движение переводит прямую в прямую, луч в луч, отрезок – в равный ему отрезок, угол – в равный ему отрезок, треугольник – в равный ему треугольник.

Предположим, что в результате движения фигура F переходит в фигуру F_1, а фигура F_1 переходит в результате второго движения в фигуру F_2. Тогда фигура F переходит в результате этих двух движений в фигуру F_2 и этот перенос будет снова движением (*рис.*3).

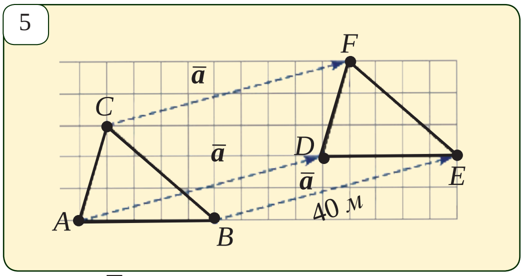
Пусть на плоскости задан какой-либо вектор $\overline{AB}$ и произвольная точка X. Если для точки X_1 выполнено условие $\overline{XX_1} = \overline{AB}$, то говорят, что точка X *параллельно перенесена* в точку X_1 на вектор $\overline{AB}$.

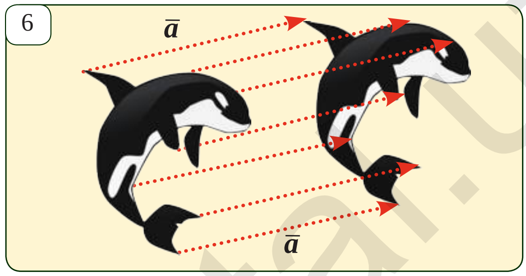




Если каждая точка плоской фигуры F перенесена на вектор $\overline{AB}$ (рис.4), то образуется новая фигура F_1. В этом случае говорят, что фигура F параллельно перенесена в фигуру F_1. При параллельном переносе каждая точка фигуры F будет параллельно перенесена в одном направлении на одинаковое расстояние.

На *рис.*5 каждая точка треугольника параллельно перенесена на 40 *м* относительно начального положения, а дельфин на *рис.*6 перенесен на





вектор $\overline{a}$.

Очевидно, что параллельный перенос является движением. Поэтому параллельный перенос переводит прямую в прямую, луч в луч, отрезок – в равный ему отрезок, и т.д.

Пусть при параллельном переносе на вектор $\overline{AB} = (a;\ b)$ точка $X\ (x;\ y)$ фигуры F переходит в точку $X_1\ (x_1;\ y_1)$ фигуры F_1. Тогда по определению:

$$x_1 - x = a\ , \qquad y_1 - y = b \qquad \text{или} \qquad x_1 = x + a\ , \qquad y_1 = y + b.$$

Эти формулы называются *формулами параллельного переноса*.

Задача 1. В какую точку перейдет точка (-2; 4) при параллельном переносе на вектор $\overline{p} = (3;\ 2)$?

Решение. Согласно формулам параллельного переноса:

$x_1 = -2 + 3 = 1, \qquad y_1 = 4 + 2 = 6$. ***Ответ:*** $X_1(1;\ 6)$.

Задачи и задания.

15.1. В какую точку перейдет точка а) (3;2); б) (0;2); в) (2;-5) при параллельном переносе на вектор $\overline{p} = (-2;\ 1)$?

15.2. При параллельном переносе точка $A(4;2)$ перешла в точку $B(3;7)$. Найдите вектор, на который был совершен параллельный перенос.

15.3. Докажите, что параллельный перенос переводит а)прямую в прямую, б) луч в луч, в) отрезок – в равный ему отрезок.

15.4. При параллельном переносе точка (1;2) перешла в точку (1;-1). В какую точку перейдет начало координат?

15.5. При параллельном переносе точка (3;-4) перешла в точку (2;-4). В какую точку перейдет начало координат?

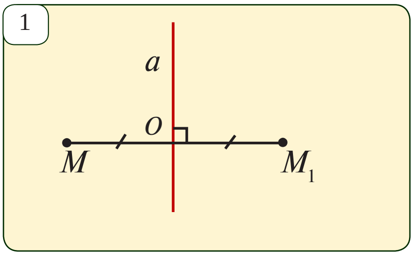
15.6. Существует ли параллельный перенос, переводящий точку $A(2;1)$ в точку $B(1;0)$, точку $C(3;-2)$ в точку $D(2;-3)$?

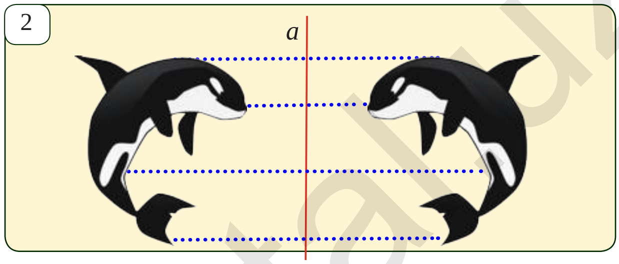
15.7. Существует ли параллельный перенос, переводящий точку $A(-2;3)$ в точку $B(1;2)$, точку $C(4;-3)$ в точку $D(7;-2)$?

15.8. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. При параллельном переносе отрезок A_1D перешел в отрезок B_1C. В какой отрезок перейдет отрезок AA_1?

16 ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ

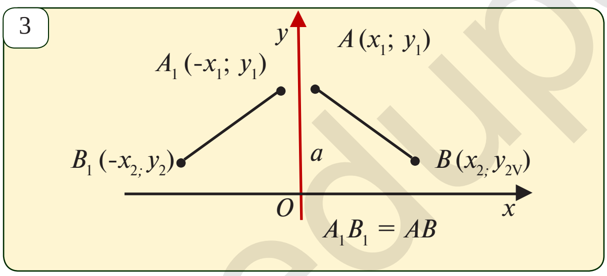
Пусть на плоскости задана прямая a и не лежащая на ней точка M. Опустим из точки M на прямую a перпендикуляр и обозначим через O его основание (рис.1). Если для точки M_1, лежащей на перпендикуляре выполнено $MO = M_1O$, то точки M и M_1 называются симметричными друг другу относительно прямой a или симметричными друг другу относительно оси.

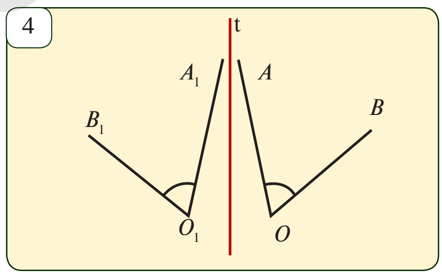




Сопоставим произвольной точке M плоскости точку M_1, симметричную ей относительно прямой a (оси). Такое отображение плоскости в себя называется симметрией относительно оси. Прямую a будем называть осью симметрии.

Дельфины на рис.2 симметричны друг другу относительно оси a.





Симметрия относительно оси является движением, так как она сохраняет расстояние между точками.

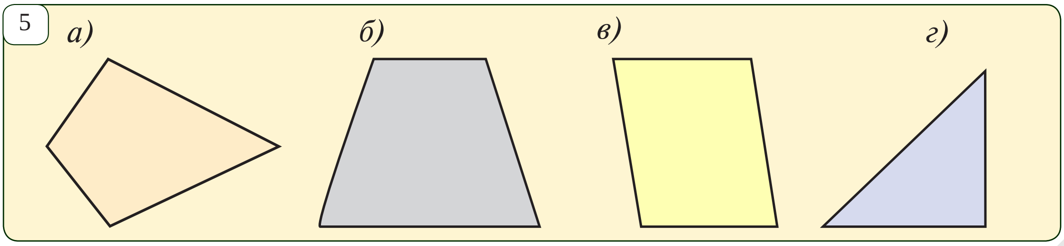
Давайте докажем это утверждение. На рис.3. изображены произвольные точки $A\ (x_1;\ y_1)$ и $B\ (x_2;\ y_2)$. Пусть точки $A_1\ (-x_1;\ y_1)$ и $B_1\ (-x_2;\ y_2)$ симметричны им относительно прямой a (лучу Oy). Докажем, что $AB = A_1B_1$. Действительно, по формуле расстояния между двумя точками

$$AB = (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2,$$

$$A_1B_1= (-x_2-(-x_1))^2+(y_2-y_1)^2 = (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

то есть эти расстояния равны. Отсюда следует также, что при симметрии относительно оси каждый отрезок переходит в равный ему отрезок.

Точно также можно показать, что при симметрии относительно оси каждый угол переходит в равный ему угол. При этом изменяется лишь направленность угла (*рис.*4).



Точка A $(x; y)$ при симметрии относительно оси Ox переходит в точку A_1 $(x; -y)$, а при симметрии относительно оси Oy переходит в точку A_2 $(-x; y)$.

Задачи и задания.

16.1. В какие точки перейдут точки (1; 2), (0; 2), (2; 2) при симметрии относительно координатной оси а) Ox; б) Oy

16.2. Точка с координатами (2; 4) при симметрии относительно координатной оси перешла в точку с координатами (2; -4). Относительно какой оси было совершено это отображение?

16.3. Какие из фигур на рис.5 симметричны относительно оси? Перерисуйте эти фигуры себе в тетрадь и постройте их оси симметрии.

16.4. Сколько осей симметрии имеют прямоугольник, квадрат, ромб, равнобокая трапеция?

16.5. Нарисуйте какой-либо треугольник ABC. Изобразите треугольник, симметричный ему относительно прямой, проходящей через вершину C.

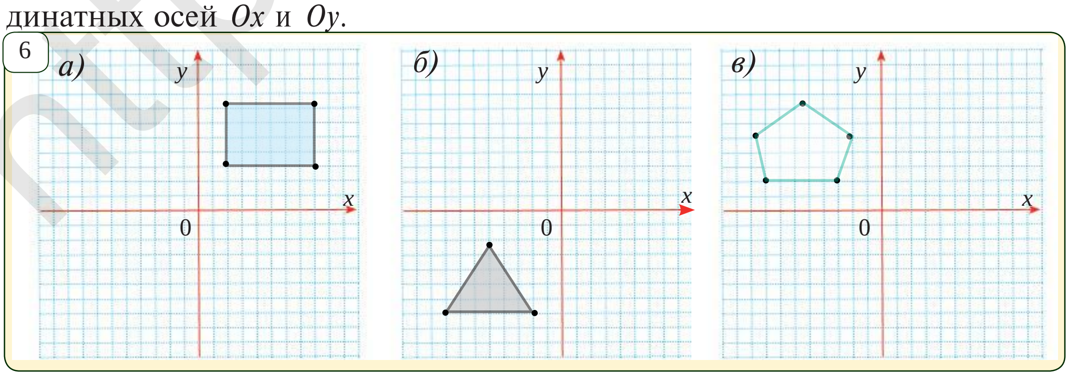
16.6. Пусть $ABCD$ – параллелограмм с вершинами A (3; 2), B (2; 7), C (6; 7) и D (7; 2). Изобразите параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$, симметричный ему относительно оси Oy.

16.7. Изобразите на координатной плоскости график функции $y=x+4$. Изобразите прямую, симметричную данной относительно оси Ox, и определите вид функции, графиком которой является эта прямая.

16.8. Слово, которое одинаково читается слева направо и справа налево, называется палиндромом. Какие из следующих палиндромов имеют ось симметрии?

РОТОР РЕПЕР КАК ПОП ПОТОП КОМОК ШАЛАШ

16.9. Перерисуйте фигуры, заданные на координатной плоскости (рис.6), себе в тетрадь. Постройте фигуры, симметричные им относительно координатных осей Ox и Oy.



17 ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ И ПОВОРОТ

Точки A и A_1 на плоскости называются *симметричными относительно точки* O, если $AO = OA_1$, то есть если точка O - середина отрезка AA_1 (рис.1).

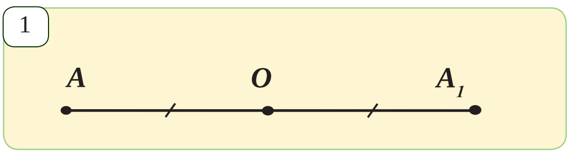
Если каждая точка плоской фигуры F перенесена в точку, симметричную ей относительно точки О (рис.2), то образуется новая фигура F_1. В этом случае говорят, что фигуры F и F_1 *симметричны относительно точки* О.

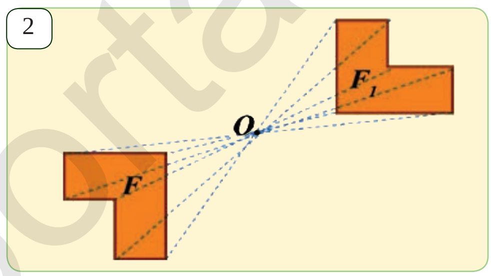
Изображения дельфинов на *рис.*3 – фигуры, симметричные относительно точки O.

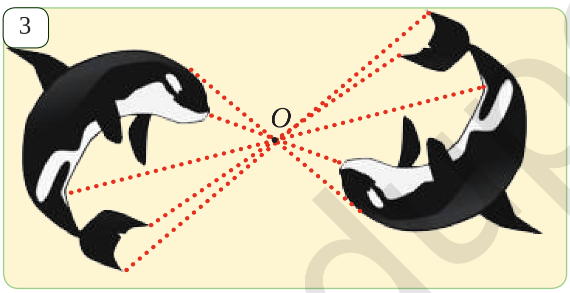
Симметрия относительно точки является движением.

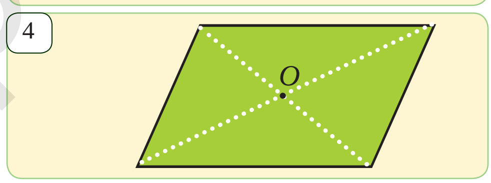
Если фигура F при симметричном отображении относительно точки O переходит в себя, то она называется центрально-симметричной фигурой.

Например, параллелограмм (*рис.*4) – центрально-симметричная фигура относительно точки пересечения диагоналей O.

1


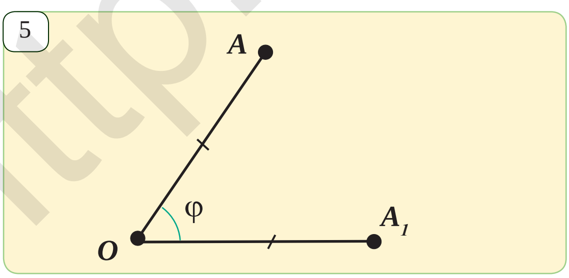
2


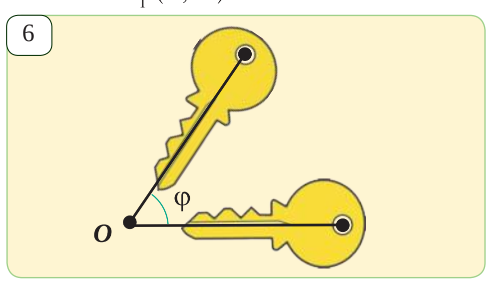
3


4


Задача 1. В какую точку перейдет точка A (1;2) при симметрии относительно точки O (2;4)?

Решение. Пусть A_1 $(x; y)$ – искомая точка. По определению точка O – середина отрезка AA_1. Значит, $2 = (x+1)/2$, $4 = (y+2)/2$. Из этих равенств получим $x = 4 - 1 = 3$, $y = 8 - 2 = 6$. *Ответ:* A_1 (3; 6).

5


6


Пусть на плоскости заданы точка O и угол φ. Предположим, что точка A переносится в точку A_1 так, что $OA = OA_1$ и $\angle AOA_1 = \varphi$. Такое преобразование называется поворотом плоскости на угол φ относительно точки O.

Если каждую точку плоской фигуры F повернем на угол φ относительно точки O, то образуется новая фигура F_1. В этом случае говорят, что *фигура F перешла в фигуру F_1 поворотом на угол φ относительно точки O*. На *рис.*6 изображен ключ и фигура, которая образована при повороте его на некоторый угол.

Поворот относительно точки также является движением.

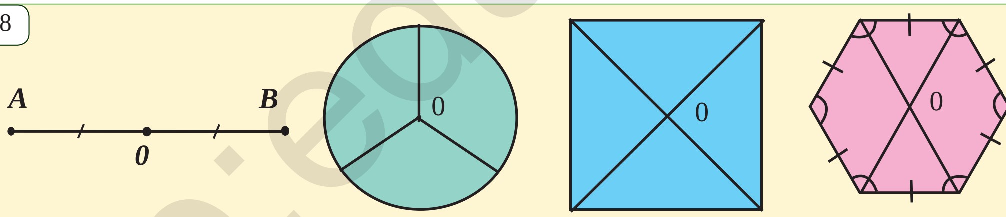
Поворот на угол 180° относительно точки O является центральной симметрией относительно точки O.

Точка A $(x; y)$ с заданными координатами при симметрии относительно начала координат переходит в точку A_1 $(-x; -y)$: $A\ (x;\ y) \longrightarrow A_1\ (-x;\ -y)$.

В природе симметрию можно встретить на каждом шагу. Например, большинство живых существ, в частности тело человека и животного, листья и цветы растений симметричны (*рис.* 7). Есть также неживые природные объекты, такие как снежинки, кристаллы соли и молекулярная структура вещества, которые состоят из удивительных симметричных форм. Эта природная красота и совершенство служит основой для представителей творческих профессий таких, как строители, инженеры и архитекторы, для создания зданий и сооружений, устройств и механизмов, технических и транспортных средств.

7

8



Задачи и задания.

17.1. В какую точку перейдет точка A (4; 2) при симметрии относительно точки O (-2; 3)?

17.2. Для фигур на рисунке 8, докажите, что точка O является центром симметрии.

17.3. В какие точки перейдут точки (-2; 5), (2; 2), (-6; 12) при центральной симметрии относительно начала координат?

17.4. Покажите, что центральная симметрии является движением.

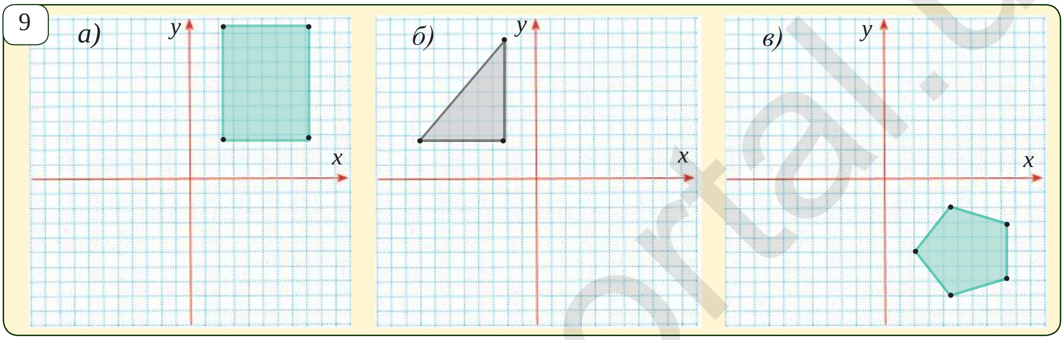
17.5. Покажите, что параллелограмм является центрально-симметричной фигурой относительно точки O, пересечения диагоналей параллелограмма (рис. 4).

17.6. Какая из фигур будет центрально-симметричной фигурой: прямоугольник, квадрат, параллелограмм, угол, прямая и равносторонний треугольник? Где находится их центр симметрии?

17.7. Нарисуйте отрезок AB и обозначьте точку M вне его. Изобразите отрезок A_1B_1, симметричный отрезку AB относительно точки M.

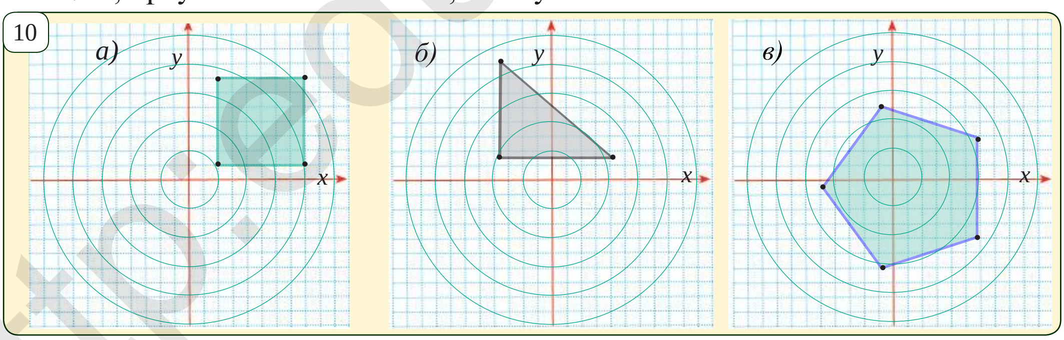
17.8. Нарисуйте произвольный треугольник ABC. Изобразите треугольник, симметричный ему относительно точки: а) C; б) пересечения медиан.

17.9. На координатной плоскости задан параллелограмм $ABCD$ с вершинами в точках A (3, 2), B (2; 7), C (6; 7) и D (6; 2). Изобразите параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$, симметричный ему относительно точки O (0, 0).

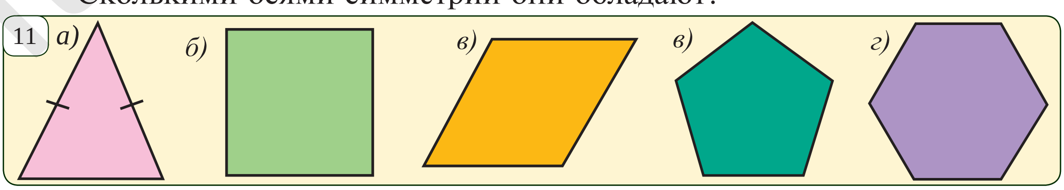


17.10. Перерисуйте фигуры, заданные в координатной плоскости (*рис.*9), себе в тетрадь. Постройте в этой координатной плоскости фигуры, симметричные им относительно начала координат.

17.11. Перерисуйте фигуры, заданные в координатной плоскости (*рис.*10), себе в тетрадь. В этой координатной плоскости поверните квадрат на 90°, треугольник – на 180°, пятиугольник – на 120°.



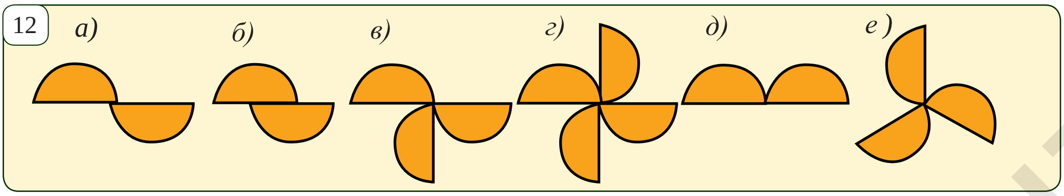
17.12. Определите, какой тип симметрии имеют многоугольники на *рис.* 11. Сколькими осями симметрии они обладают?



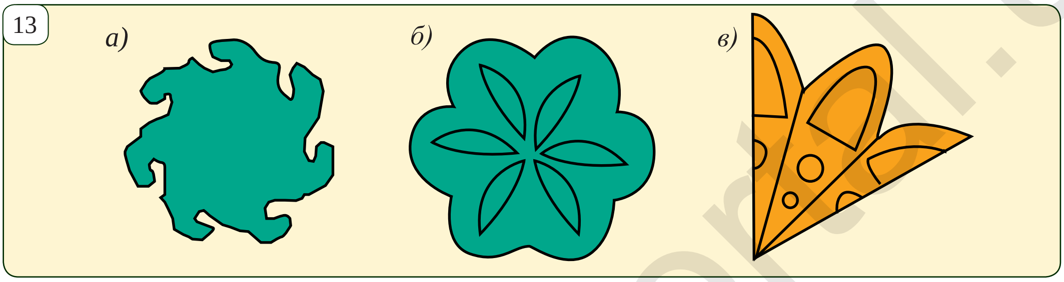
17.13. Определите, какой тип симметрии имеют буквы

M, N, S, X, Z, V, T, Y, U, W, D, B, H, K, C, I, E, A

17.14. На рис.12 изображены фигуры, составленные из нескольких полукругов. Определите, в каких из них, существует поворот, переводящий фигуру в себя. Опишите эти повороты.



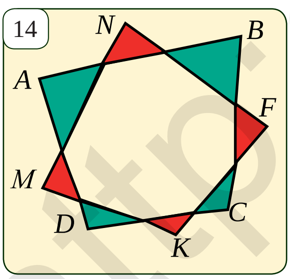
17.15. Какие из фигур на рис. 13 обладают центром симметрии? На какой угол их нужно повернуть, чтобы они перешли в себя?

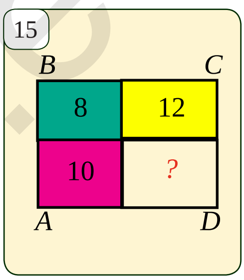


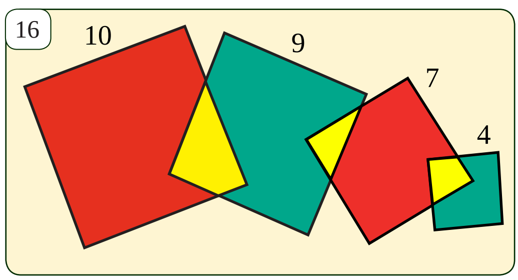
17.16. Четырехугольники *ABCD* и *MNPK* на рис.14 имеют одинаковую площадь. Покажите, что сумма площадей красных треугольников равна сумме площадей треугольников зеленого цвета.

17.17. Прямоугольник *ABCD* разделен на четыре прямоугольника прямыми, параллельными его сторонам. Используя данные рисунка 15, найдите площадь незакрашенного прямоугольника.

17.18. Квадраты фигур на рисунке 16 имеют стороны 10 *см*, 9 *см*, 7 *см* и 4 *см*. сумма площадей красных квадратов равна 112 см^2. Найти сумму площадей синих квадратов.





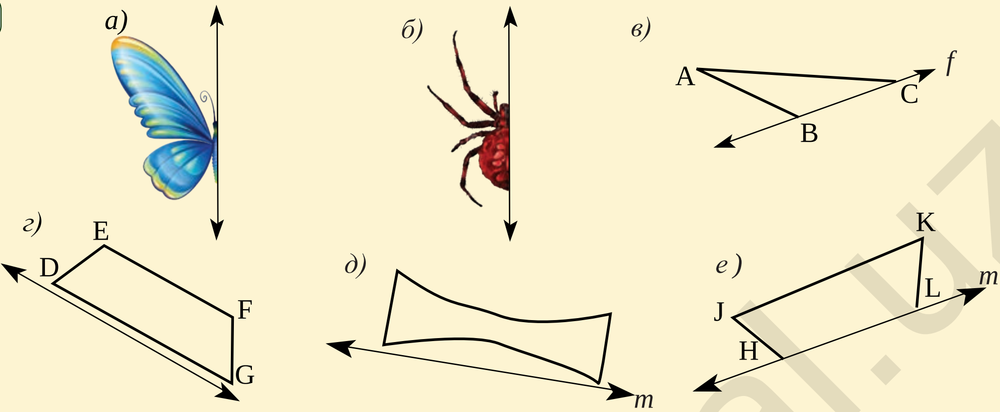


Проект "Снежинки"

В природе все снежинки симметричны и не одинаковы. Каждая снежинка переходит в себя при повороте на 60°. Как можно вырезать на бумаге фигуру, которая переходит в себя при повороте на 60°? Вырежьте на бумаге несколько типов снежинок.

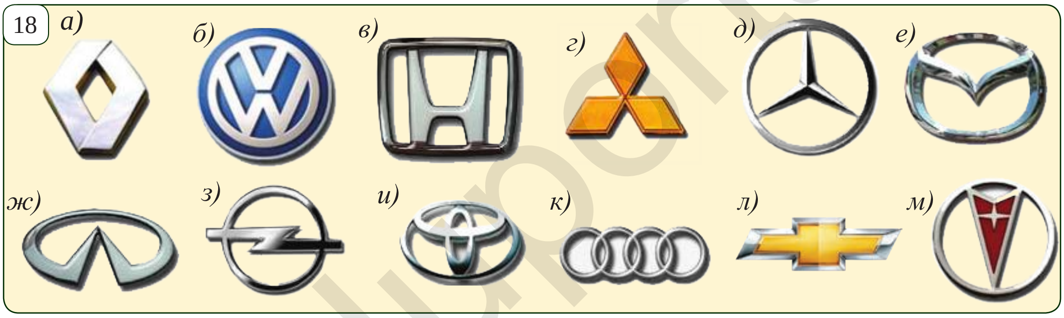
17.19. Перерисуйте фигуры, заданные на рис.9, себе в тетрадь. Постройте фигуры, симметричные им относительно заданной оси.

17



17.20. Определите, каким типом симметрии обладают логотипы автомобильных компаний, изображенные на рис.18.

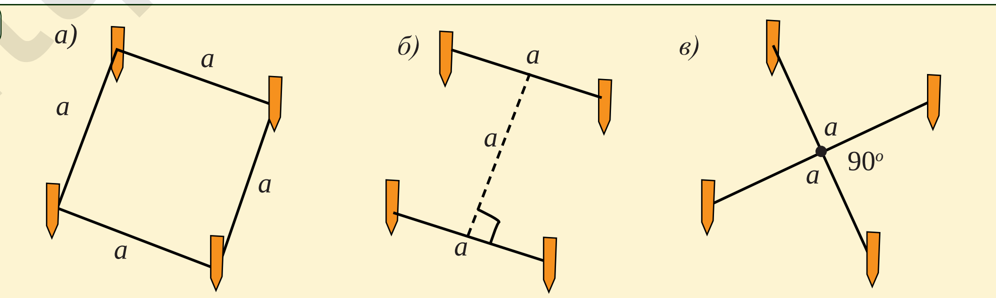
18



Проектная работа "Геометрия цветника".

Три друга Андрей, Володя и Сережа, хотят разбить квадратный цветник. Андрей хочет разбить цветник при помощи 4 разных нитей одинаковой длины, протянутых между 4 колышками (*рис.*19.а). Володя хочет разбить цветник при помощи 2 разных нитей одинаковой длины, протянутых между колышками, а затем проведя параллелльную прямую через середины протянутых нитей (*рис.19.б*). Сережа тоже хочет разбить цветник при помощи 2 разных нитей одинаковой длины, протянутых между колышками так, чтобы они были перпендикулярны (рис. 19.в) и пересекались по серединам. Скажите, кто из них поступил правильно? Почему?

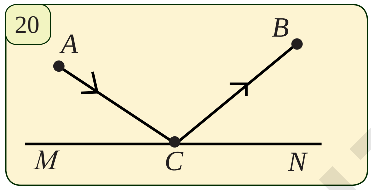
19



Проектная работа "Геометрия и оптика".

В семнадцатом веке великий французский математик Пьер Ферма обнаружил следующую закономерность: свет переходит из одной точки в другую за кратчайшее время.

1. Точки A и B лежат по одну сторону зеркала. Луч света выходит из точки A и отражаясь от поверхности зеркала, попадает в точку B (*рис.*20). Используя принцип Ферма, найдите соотношение между углом ACM (угол падения) и углом BCN (угол отражения).

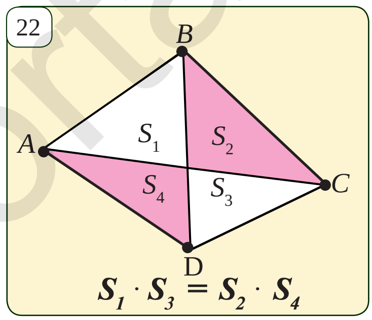


2. Дом фермера находится в точке A на берегу реки, а его ферма - в точке B (*рис.*21). Фермер каждый день из дома идет к реке, наполняет сосуды водой, а затем идет на ферму. Каким кратчайшим путем он должен это осуществлять?

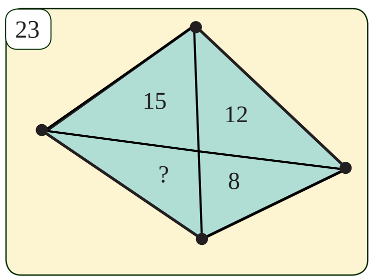
Занимательная геометрия.

а) На *рис.*22 изображен произвольный выпуклый четырехугольник. Диагонали четырехугольника разбивают его на четыре треугольника. Докажите, что для площадей этих треугольников выполнено $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$.

Указание: Используйте свойства подобных фигур.



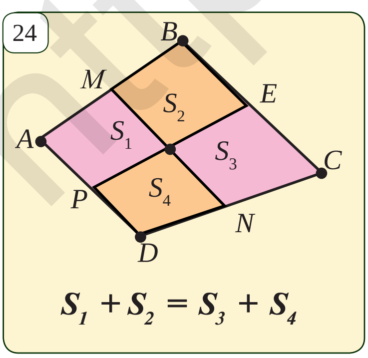
б) Используя данными *рис.*23, найдите неизвестную площадь.

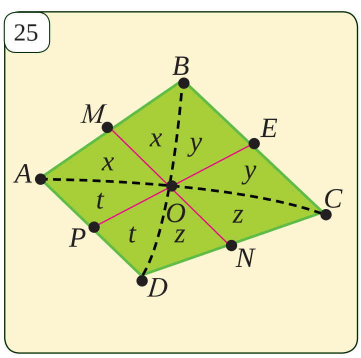


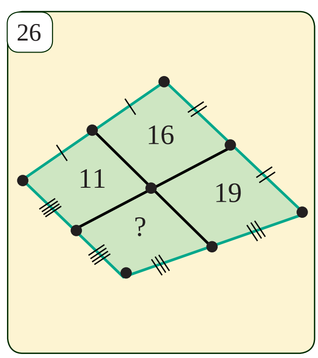
в) На *рис.*24 изображен произвольный выпуклый четырехугольник. Середины сторон четырехугольника соединены отрезками. В результате четырехугольник разбивается на четыре четырехугольника. Докажите, что для площадей этих четырехугольников выполнено $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$.

Указание: Используйте вспомогательную фигуру на *рис.*25

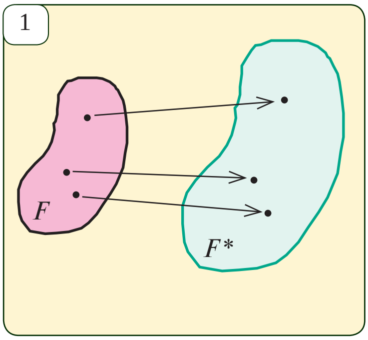
в) Найдите неизвестную площадь, используя данные *рис.*26.







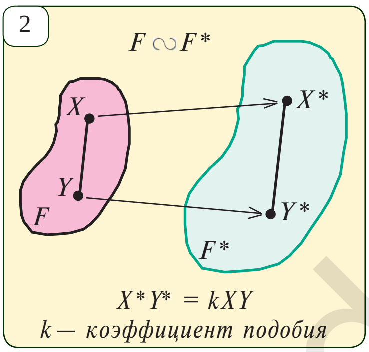
18 ПОДОБИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР



На предыдущих уроках вы познакомились с понятием подобных многоугольников. Это понятие можно ввести и для любых геометрических фигур.

Пусть каждой точке фигуры F поставлена в соответствие некоторая точка фигуры F^* так, что каждой точке фигуры F^* соответствует единственная точка фигуры F (*рис.* 1). Тогда говорят, что определено преобразование фигуры F в фигуру F^* .

Определение. Если при преобразовании фигуры F в фигуру F^* расстояния между точками изменяются в одно и то же число раз, то такое преобразование называется *преобразованием подобия* (*рис.* 2).



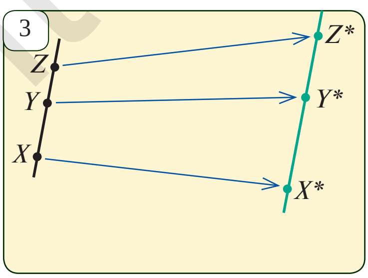
Это определение можно истолковать так. Предположим, что в результате некоторого преобразования произвольным точкам X, Y фигуры F сопоставлены точки X^*, Y^* фигуры F^*. Если $X^*Y^* = k\ XY$, $k > 0$, то такое преобразование называется *преобразованием подобия*. При этом число k - одно и то же для всех точек X и Y, и оно называется *коэффициентом подобия*.

Если фигуры F и F^* заданы и при этом первая переводится во вторую преобразованием подобия, то фигуры F и F^* называются подобными. Подобие фигур обозначается так: $F \backsim F^*$. Если нужно также указать коэффициент подобия k, то подобие фигур обозначается также так: $F \overset{k}{\backsim} F^*$.

Если при преобразовании подобия точке X сопоставлена точка X^*, то говорят, что точка X преобразована в точку X^*, или переходит в точку X^*.

Преобразование подобия обладает следующими свойствами.

Теорема. Преобразование подобия переводит: а) прямую в прямую; б) луч в луч; в) угол в равный ему угол; г) отрезок в отрезок, длина которого больше данного в k раз.



Доказательство. а) Пусть при преобразовании подобия с коэффициентом k различные точки X, Y и Z, лежащие на одной прямой, переходят в точки X^*, Y^* и Z^* (*рис.* 3).

Пусть одна из точек X, Y, Z, например точка Y, лежит между двумя другими. Тогда $XZ = XY + YZ$. Согласно определению преобразования подобия:

$$X^*Z^* = k\,XZ = k\,(XY+YZ) = k\,XY + k\,YZ = X^*Y^* + Y^*Z^*.$$

Отсюда следует, что точки X^*, Y^* и Z^* лежат на одной прямой.

Мы доказали утверждение только для случая а). Доказательство остальных утверждений предлагаем вам в качестве упражнения.

Задачи и задания.

18.1. Что такое преобразование подобия?

18.2. Какие фигуры называются подобными?

18.3. Постройте прямоугольник, подобный прямоугольнику с шириной 3 см и длиной 4 см, если коэффициент подобия равен 2.

18.4. На рис.4 дан план школьного двора в масштабе 1:1000. Произведя необходимые измерения, найдите истинные размеры: а) школьного двора; б) здания школы; в) клумб; г) спортплощадки; д) школьного сада.

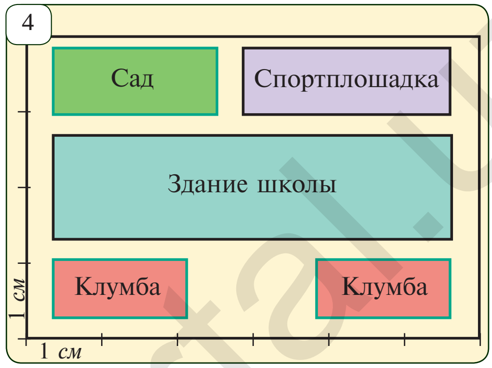
18.5. Масштаб карты 1:50000 (рис. 5). Найдите расстояние между центрами сел Обод и Озод.

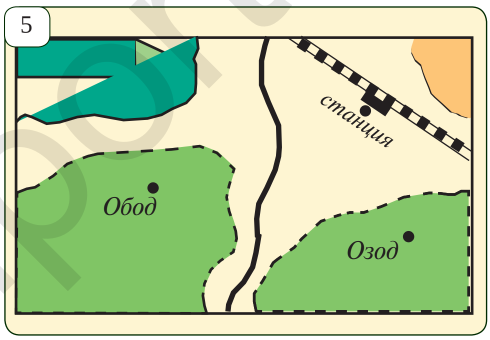
18.6. Докажите, что при преобразовании подобия сохраняются углы между лучами.

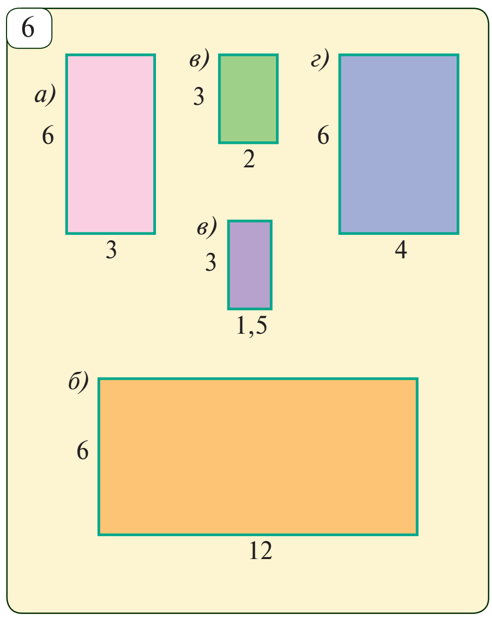
18.7*. Докажите, что преобразование подобия переводит: а) параллелограмм в параллелограмм; б) квадрат в квадрат; в) прямоугольник в прямоугольник; г) ромб в ромб; д) трапецию в трапецию.

18.8*. При преобразовании подобия с коэффициентом подобия 0,6 треугольник ABC переходит в треугольник $A^*B^*C^*$. Найдите периметр треугольника $A^*B^*C^*$, если периметр треугольника ABC равен 12 см.

18.9. На рис. 6 укажите пары подобных прямоугольников и определите коэффициенты подобия.





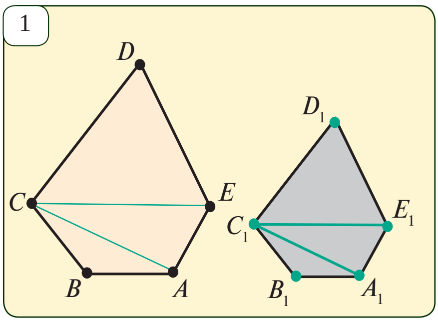


19 СВОЙСТВА ПОДОБНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Теорема 1. Отношение периметров подобных многоугольников равно коэффициенту подобия.

Доказательство. Действительно, если многоугольники $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$ подобны с коэффициентом подобия k, то $B_1B_2=k\,A_1A_2$, $B_2B_3=k\,A_2A_3$, ... , $B_nB_1=k\,A_nA_1$. Откуда получаем равенство $P=B_1B_2+B_2B_3+...+B_nB_1=k\,A_1A_2+k\,A_2A_3+...+k\,A_nA=$ $=k\,(A_1A_2+A_2A_3+...+A_nA_1)=k\,P_1$. *Теорема доказана.*

Теорема 2. Подобные многоугольники можно разбить на одинаковое число подобных треугольников.



Доказательство. Предположим, что многоугольники $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ подобны с коэффициентом подобия k.

Из соответствующих вершин C и C_1 проведем диагонали CA, CE, C_1A_1, и C_1E_1 (рис.1). В результате многоугольники разбиваются на одинаковое число треугольников. Докажем подобие трех пар полученных треугольников.

1. $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$. Действительно, у этих треугольников по условию,

$\angle B=\angle B_1$, $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}=k$. Тогда по признаку СУС подобия треугольников: $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$.

2. $\Delta CDE \backsim \Delta C_1D_1E_1$. Это подобие доказывается так же, как в случае 1.

3. $\Delta ACE \backsim \Delta A_1C_1E_1$. Действительно, рассмотрим углы: $\angle CAE$ и $\angle C_1A_1E_1$

$$\angle CAE=\angle BAE-\angle CAB,\ \angle C_1A_1E_1=\angle B_1A_1E_1-\angle C_1A_1B_1.$$

Здесь, $\angle BAE=\angle B_1A_1E_1$ (как соответствующие углы данных подобных многоугольников). $\angle CAB=\angle C_1A_1B_1$ (как соответствующие углы подобных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

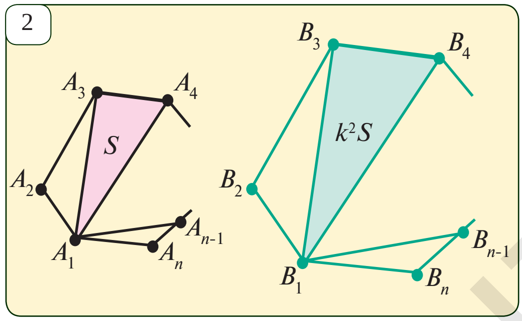
Значит, $\angle CAE=\angle C_1A_1E_1$.

Рассмотрим стороны AC, AE и A_1C_1 и $A_1C_1{:}AC=kA_1C_1$, так как они - сходственные стороны подобных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. $AE=kA_1E_1$ так как они - сходственные стороны подобных пятиугольников. Тогда по признаку СУС подобия треугольников $\Delta ACE \backsim \Delta A_1C_1E_1$. Для произвольных подобных многоугольников доказательство проводится аналогично..

Теорема доказана.

Теорема 3. Отношение площадей подобных многоугольников равно квадрату коэффициента подобия.

Доказательство. Предположим, что многоугольники $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$ подобны с коэффициентом подобия k. Тогда треугольники $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$, ..., $A_1A_{n-1}A_n$ подобны треугольникам $B_1B_2B_3$, $B_1B_3B_4$, ..., $B_1B_{n-1}B_n$ соответственно, причем отношение площадей подобных треугольников равно k^2 (рис. 2)



$S_{A_1A_2A_3}=k^2S_{B_1B_2B_3}$, $S_{A_1A_3A_4}=k^2S_{B_1B_3B_4}$, ... , $S_{A_1A_{n-1}A_n}=k^2S_{B_1B_{n-1}B_n}$.

Сложив соответствующие части этих равенств, получим $S_{A_1A_2...A_n}=k^2\,S_{B_1B_2...B_n}$

Теорема доказана.

Задача. Найдите отношение площадей двух подобных многоугольников с периметрами 18 *см* и 24 *см*.

Решение. 1) Воспользуемся тем, что отношение периметров подобных многоугольников равно коэффициенту подобия, получим, что $k=24:18=4:3$.

2) Так как отношение площадей подобных многоугольников равно квадрату коэффициента подобия, то искомое отношение равно $\frac{16}{9}$.

Ответ: $\frac{16}{9}$.

Задачи и задания

19.1. Чему равно отношение периметров подобных многоугольников?

19.2. Прокомментируйте теорему об отношении площадей подобных многоугольников.

19.3. Могут ли быть подобными треугольник и четырехугольник?

19.4. Найдите коэффициент подобия четырехугольников с площадями 6 м^2 и 24 *м*^{2}.

19.5. Периметры двух подобных многоугольников 18 *см* и 36 *см*, сумма их площадей равна 30 *см*^{2}. Найдите площади многоугольников.

19.6. Прямая, проведенная параллельно одной из сторон треугольника с периметром 84 *см*, отсекает от него треугольник с периметром 42 *см* и площадью 26 *см*^{2}. Найдите площадь заданного треугольника.

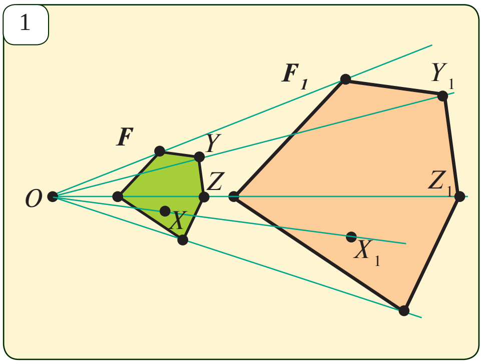
19.7. Будут ли подобными фигуры, симметричные относительно точки O? А фигуры, симметричные относительно оси? Если да, то найдите коэффициент подобия.

19.8. На плане с масштабом 1:1000 изображено хлопковое поле в форме четырехугольника площадью 12 см^2. Найдите реальную площадь поля.

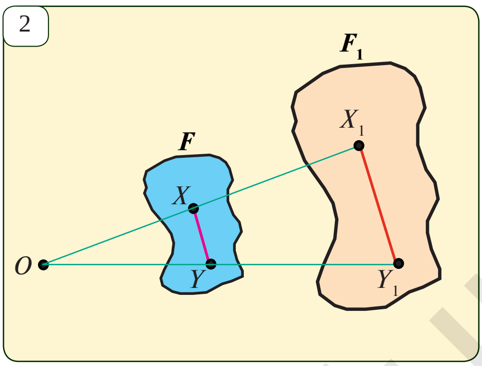
19.9*. Сумма периметров двух подобных треугольников с площадями 8 см^2 и 32 см^2 равна 48 *см*. Найдите периметры треугольников.

ГОМОТЕТИЯ И ПОДОБИЕ

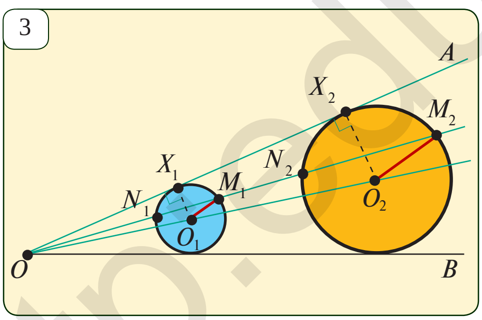
1



2



3



Гомотетия – одно из простейших преобразований подобия. Пусть даны фигура F, точка O и положительное число k. Проведем через произвольно выбранную точку X фигуры F луч OX и отложим на нем отрезок OX_1, равный $k \cdot OX$ (рис. 1). Определенное подобным образом преобразование, сопоставляющее каждой точке X фигуры F точку X_1, называется гомотетией. При этом точка O называется центром гомотетии, число k — коэффициентом гомотетии, а фигура F и фигура F_1, получающаяся из фигуры F при этом преобразовании, называются гомотетичными фигурами.

***Теорема.* Гомотетия является преобразованием подобия.**

Доказательство. Пусть точки X и Y фигуры F при гомотетии с центром O и коэффициентом k переходят в точки X_1 и Y_1 (рис. 2). В этом случае, согласно определению гомотетии, в треугольниках XOY и X_1OY_1 угол O – общий и выполнено соотношение $\frac{OX_1}{OX}=\frac{OY_1}{OY}=k$.

Значит, треугольники XOY и X_1OY_1 подобны по признаку СУС подобия треугольников

Поэтому $\frac{X_1Y_1}{XY}=\frac{OX_1}{OX}$, откуда,

$X_1Y_1=k \cdot XY$ *Теорема доказана.*

Задача. Докажите, что любые две окружности, касающиеся сторон угла AOB, являются гомотетичными с центром гомотетии в точке O.

Доказательство. Пусть окружности с центрами O_1 и O_2 касаются сторон угла AOB (рис.3). Докажем, что они гомотетичны.

Предположим, что точки X_1 и X_2 – соответствующие точки касания этих окружностей и луча OA.

Тогда, $\Delta OX_1O_1 \backsim \Delta OX_2O_2$, так как

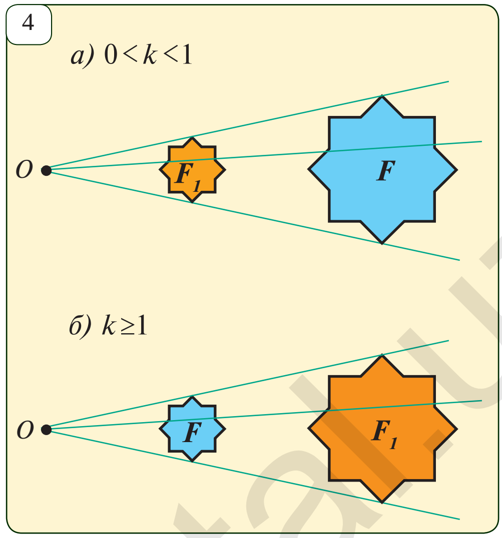
$$\angle X_1OO_1=\angle X_2OO_2 \quad \text{и} \quad \angle OX_1O_1=\angle OX_2O_2=90^\circ.$$

Отсюда, $\frac{O_2X_2}{O_1X_1}=\frac{OO_2}{OO_1}$.

Правую часть этой пропорции обозначим через k и рассмотрим гомотетию с центром в точке O и коэффициентом $k=\frac{O_2X_2}{O_1X_1}$.

Пусть при этой гомотетии произвольная точка M_1 окружности с центром O_1 перейдет в точку M_2 . Тогда, $O_2M_2=kO_1M_1$ или $O_2M_2=\frac{O_2X_2}{O_1X_1}\cdot O_1M_1$.

Так как $O_1X_1=O_1M_1$, то получим равенство $O_2M_2=O_2X_2$. Это значит, что точка M_2 лежит на окружности с центром O_2 и радиусом O_2X_2.



Активизирующее упражнение.

На рис. 4 изображены гомотетичные фигуры с коэффициентами: а) $0<k<1$; б) $k>1$. Какие выводы относительно "сжатия" или "растяжения" гомотетичных фигур можно сделать, глядя на величину коэффициента гомотетии?

Задачи и задания.

20.1. Что такое гомотетия? Что такое центр гомотетии, коэффициент гомотетии?

20.2. Докажите, что гомотетия является преобразованием подобия.

20.3. Постройте треугольник. Выберите точку O, принадлежащую: а) внутренней части; б) внешней части треугольника, и рассмотрите гомотетию с центром O и коэффициентом $k=2$, построив треугольники, гомотетичные данному.

20.4. Два ромба с периметрами 18 см и 27 см гомотетичны. Найдите отношение сторон и площадей этих ромбов.

20.5. При гомотетии точка X переходит в точку X_1, точка Y – в точку Y_1. Найдите центр этой гомотетии, если точки X, X_1, Y, Y_1 не лежат на одной прямой.

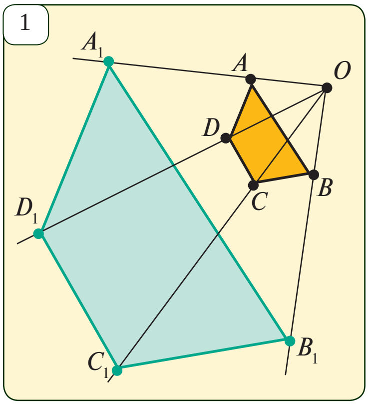
20.6. При гомотетии с коэффициентом 2 точка X переходит в точку X_1. Найдите центр этой гомотетии.

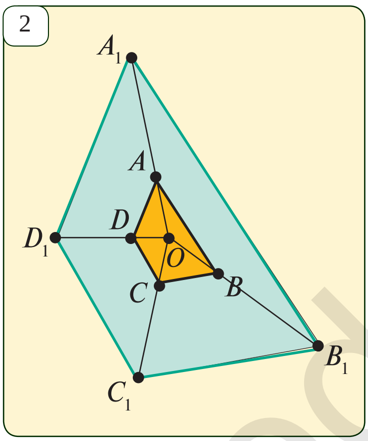
20.7. Докажите, что фигура, гомотетичная окружности, является окружностью.

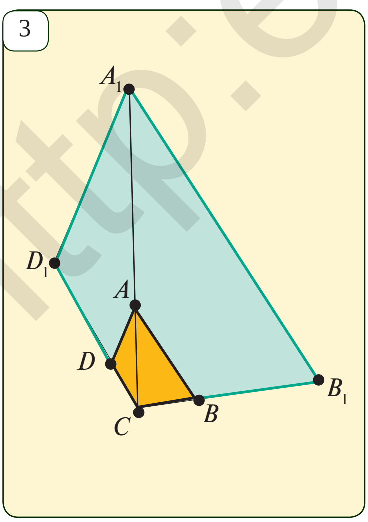
20.8. Постройте окружность. Рассмотрите фигуры, гомотетичные ей при гомотетии с центром в центре окружности и коэффициентами а) $\frac{1}{2}$; б) 2; в) 3; г) $\frac{1}{3}$.

20.9. Пусть дана точка A, принадлежащая внутренней области угла. Постройте окружность, которая касается сторон угла и проходит через точку A.

21 ПОСТРОЕНИЕ ПОДОБНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ







До сих пор при доказательстве теорем и решении задач мы ограничивались построением подобных треугольников. С тем, как строятся подобные многоугольники, вы познакомитесь ниже.

Задача. Постройте четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$, подобный данному четырехугольнику $ABCD$, если коэффициент подобия равен 3 (рис. 1).

Построение. Отметим на плоскости произвольную точку O. Проведем лучи OA, OB, OC и OD, исходящие из этой точки и проходящие через вершины заданного четырехугольника. На этих лучах отложим отрезки $OA_1=3OA$, $OB_1=3OB$, $OC_1=3OC$ и $OD_1=3OD$. Полученный четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ – искомый.

Обоснование. Докажем, что $ABCD \backsim A_1B_1C_1D_1$.

1. Пропорциональность сходственных сторон.

а) $\Delta AOD \backsim \Delta A_1OD_1 \Rightarrow \dfrac{A_1D_1}{AD}=\dfrac{O_1D_1}{OD}=\dfrac{OA_1}{OA}=3;$ (1)

б) $\Delta DOC \backsim \Delta D_1OC_1 \Rightarrow \dfrac{OD_1}{OD}=\dfrac{D_1C_1}{DC}=\dfrac{OC_1}{OC}=3.$ (2)

Из (1) и (2) получим $\dfrac{A_1D_1}{AD}=\dfrac{D_1C_1}{DC}$

Пропорциональность остальных сходственных сторон доказывается аналогично.

2. Равенство соответствующих углов.

Так как у подобных треугольников соответствующие углы равны, то $\angle A_1D_1O=\angle ADO$, $\angle C_1D_1O=\angle CDO$.

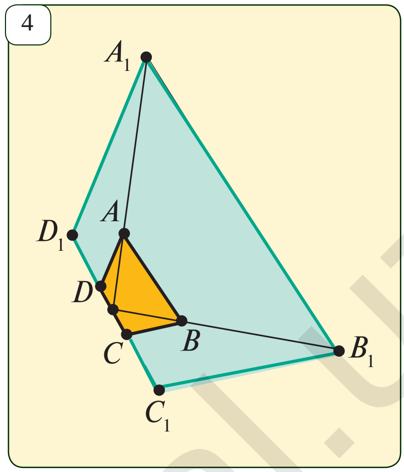
В этом случае,

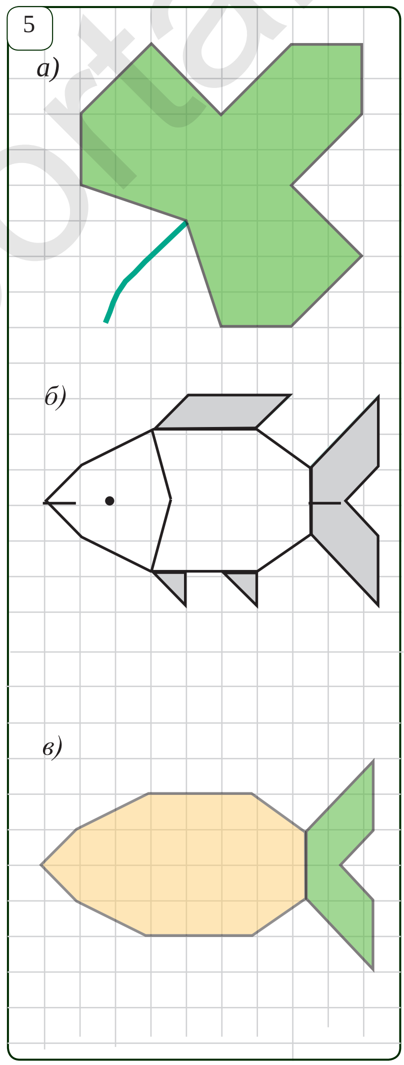
$$\angle A_1D_1C_1=\angle A_1D_1O+\angle C_1D_1O=$$
$$=\angle ADO+\angle CDO=\angle ADC,$$

то есть соответствующие углы $A_1D_1C_1$ и ADC четырехугольников равны.

Аналогично доказывается равенство остальных соответствующих углов. Итак, четырехугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ подобны. Многоугольник, подобный многоугольнику с произвольным числом сторон, строится совершенно аналогично.

В этой задаче мы выбрали центр гомотетии из внешней области прямоугольника. Вообще говоря, если центр гомотетии можно было бы выбрать лежащим во внутренней области прямоугольника (*рис.*2), в какой-либо из вершин (*рис.*3), или на какой-либо из сторон (*рис.*4). Где бы ни был выбран центр гомотетии, все четырехугольники, подобные данному четырехугольнику $ABCD$ коэффициентом подобия, равным 3, будут равны друг другу.





Задачи и задания.

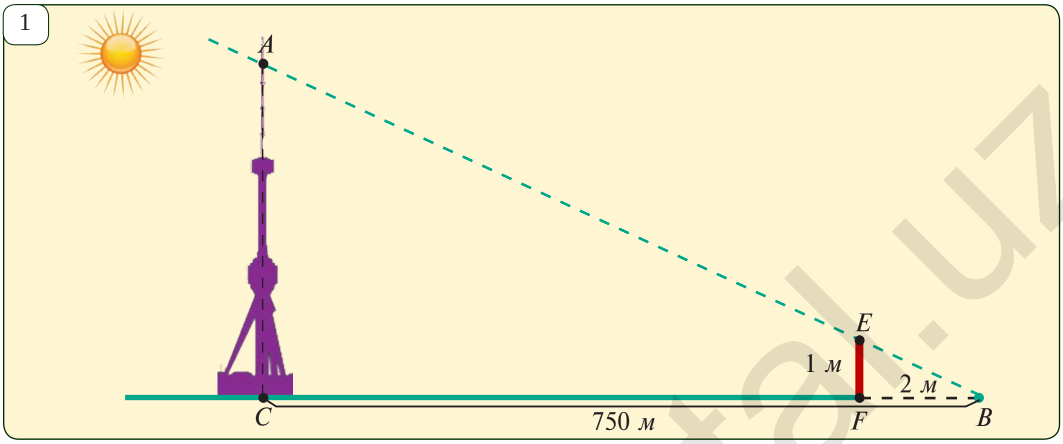
21.1. Назовите последовательность построения многоугольника, подобного данному.

21.2. Начертите в тетради какой-нибудь пятиугольник $ABCDE$. При помощи гомотетии постройте пятиугольник, подобный данному с коэффициентом подобия, равным 0,5. Рассмотрите случаи, когда центр гомотетии находится: а) в точке C; б) во внутренней области пятиугольника; в) на стороне AB.

21.3. Учитывая клетки, перерисуйте фигуры рис. 3 в тетрадь и постройте, используя гомотетию: а) рисунок листа, подобного данному, с коэффициентом подобия $k = 3$; б) рисунок рыбки, подобной данной, с коэффициентом подобия $k = 2$.

21.4. Многоугольник F_1 подобен многоугольнику F_2 с коэффициентом подобия k. Буквами P_1, P_2, S_1, S_2 обозначены периметры и площади этих многоугольников соответственно. Перепишите в тетрадь и заполните следующую таблицу.

	P_1	P_2	S_1	S_2	k
а)	84		100	25	
б)	14	28		48	
в)		150	200	100	
г)		30	24		3



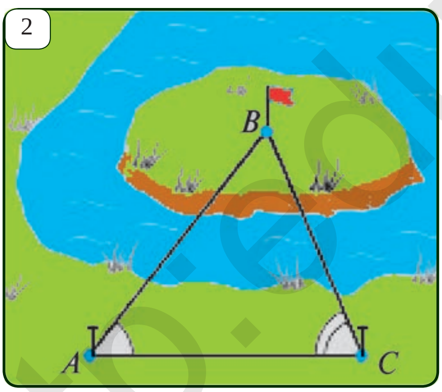
1. *Определение высоты.*

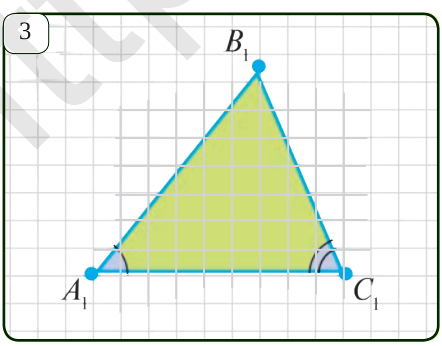
Найдем высоту Ташкентской телебашни, стоя на поверхности земли.

Пусть тень от вершины башни A падает в точку B. Забьем колышек EF вертикально так (рис.1), чтобы тень от точки Е также оказалась в точке B. Основание башни обозначим через C. Тогда полученные прямоугольные треугольники ABC и EBF будут подобны. Поэтому

$$\frac{AC}{EF}=\frac{BC}{BF} \quad \text{или} \quad AC=\frac{BC\cdot EF}{BF}.$$

Измерив расстояния BC, BF и длину EF колышка, найдем по этой формуле высоту башни AC. Например, если известно, что $EF = 1$ *м*, $BC = 750$ *м*, $FB = 2$ *м*, то $AC = 375$ *м*.





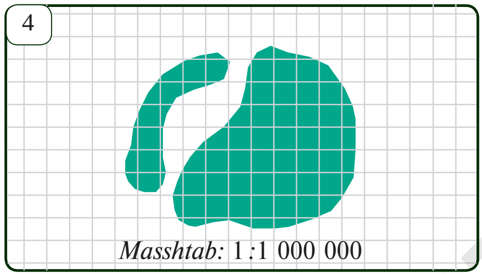
2. *Измерение расстояния до недоступной точки.*

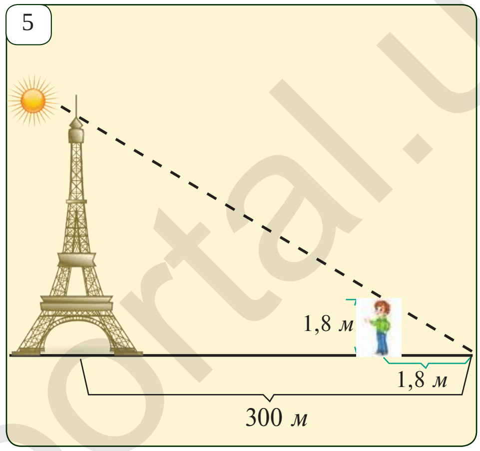
Пусть необходимо измерить расстояние от точки A до недоступной точки B (рис.2). Выйдя из точки A, выберем такую доступную точку C, из которой видны обе точки A и B и возможно измерить расстояние AC.

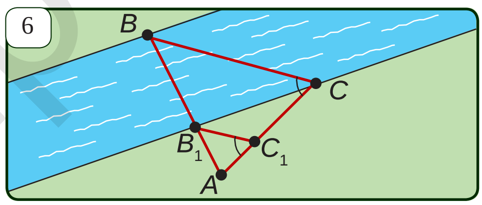
Измерим с помощью измерительных устройств углы BAC и ACB. Пусть $\angle BAC=\alpha$ и $\angle ACB=\beta$. Построим на листе бумаги треугольник $\angle A_1=\alpha$, $\angle C_1=\beta$ с углами $A_1B_1C_1$. Тогда треугольники ACB и $A_1B_1C_1$ подобны по признаку УУ подобия треугольников (рис.2 и 3). Отсюда,

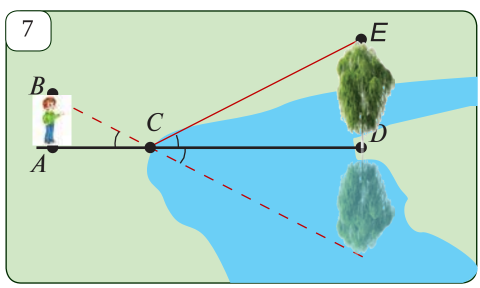
$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1} \quad \text{или} \quad AB=\frac{AC\cdot A_1B_1}{A_1C_1}.$$

Измерив расстояние AC и длины отрезков A_1B_1, A_1C_1, при помощи полученной формулы вычислим искомое расстояние AB. Для упрощения вычислений можно взять отношение AC: A_1C_1 равным 100:1 или 1000:1. Например, если $AC=130$ *м*, $\angle A=73°$, $\angle C=58°$, построим на листе бумаги треугольник $A_1B_1C_1$ с углами $\angle A_1=73°$, $\angle C_1=58°$, и стороной $A_1C_1=130$ *мм*. Измерив отрезок A_1B_1, найдем, что его длина равна 153 *мм*. Тогда искомое расстояние будет равно 153 *м*.









3. *Практическая работа на озере.*

На *рис.* 4 приведен сделанный из космоса снимок водоема. Выполнив на его основе необходимые измерения и вычисления, найдите приближенное значение площади водоема.

Задачи и задания.

22.1. Найдите высоту дерева, если длина его тени равна 10,2 *м*, а человек ростом 1,7 *м* отбрасывает тень длиной 2,5 *м*.

22.2. Определите высоту башни на *рис.* 5.

22.3. С помощью изображенных на *рис.* 6 подобных треугольников AB_1C_1 и ABC, необходимо определить ширину реки (BB_1), если $AC = 100$ *м*, $AC_1 = 32$ *м* и $AB_1 = 34$ *м*.

22.4. Человек, находящийся в точке A, видит в воде канала отражение дерева DE, растущего на его берегу. Найдите высоту дерева, если $AB = 165$ *см*, $AC = 120$ *см*, $CD = 4{,}8$ *м* (*рис.* 7).

22.5. Выберите какое-нибудь дерево во дворе и определите его высоту. Подготовьте отчет о проделанной работе.

Задача 1 На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ взяты точки M и N. При этом отрезок MN параллелен основаниям трапеции и проходит через точку пересечения O диагоналей трапеции. Пусть $BC = a$, $AD = b$. Найдите отрезки а) MO; б) ON; в) MN (*рис.* 1).

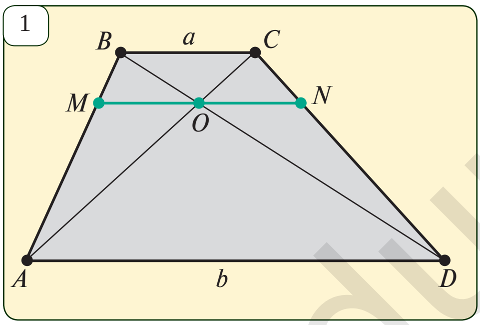
Решение. 1) По признаку УУ подобия треугольников треугольники AOD и BOC подобны, так как $\angle BOC = \angle AOD$, $\angle OBC = \angle ADO$. Отсюда

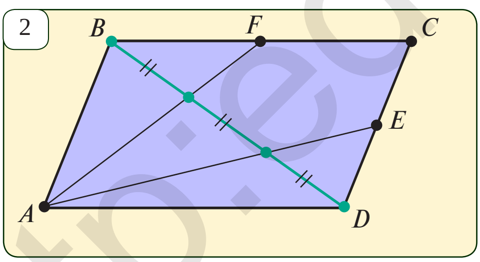
$$\frac{OC}{OA} = \frac{BC}{AD} \quad \text{или} \quad \frac{OC}{OA} = \frac{a}{b} \qquad (1)$$

2) По признаку УУ подобия треугольников треугольники ABC и AOM также подобны, так как $\angle AMO = \angle ABC$, $\angle ACB = \angle AOM$. Отсюда,

$$\frac{AC}{OA} = \frac{BC}{MO} \quad \text{или} \quad \frac{OA+OC}{OA} = \frac{a}{MO} \Rightarrow 1+\frac{OC}{OA} = \frac{a}{MO},\ \frac{OC}{OA} = \frac{a}{MO} - 1. \qquad (2)$$

3) Приравняв правые стороны равенств (1) и (2) получим равенство





$$\frac{a}{MO} - 1 = \frac{a}{b},$$

из которого следует

$$MO = \frac{ab}{a+b}. \qquad (3)$$

Действуя аналогично вышеизложенному получим

$$ON = \frac{ab}{a+b}, \qquad (4)$$

а затем сложив соответствующие стороны равенств (3) и (4) получим равенство

$$MN = \frac{2ab}{a+b}.$$

Ответ: а) $\frac{ab}{a+b}$; б) $\frac{ab}{a+b}$; в) $\frac{2ab}{a+b}$.

Примечание. *Из решения задачи следует, что* $MO = ON$.

Задачи и задания.

23.1. На боковых сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки D и E. Найдите сторону AB, если $AC \| DE$, $AC = 6$, $DB = 3$ и $DE = 2$.

23.2. Площади двух подобных треугольников равны 6 *дм*^{2} и 24 *дм*^{2}, периметр одного из них на 6 *дм* больше периметра второго. Найдите периметр большего треугольника.

23.3. Пусть вершины треугольника $A_1B_1C_1$ с периметром 1 *м* - середины сторон треугольника $A_2B_2C_2$, вершины треугольника $A_2B_2C_2$ – середины сторон треугольника $A_3B_3C_3$, а вершины треугольника $A_3B_3C_3$ — середины сторон треугольника $A_4B_4C_4$. Чему равен периметр треугольника $A_4B_4C_4$?


3

23.4. Периметры двух подобных треугольников равны 18 *дм* и 36 *дм*, сумма площадей 30 *дм*^{2}. Найдите площадь большего треугольника.

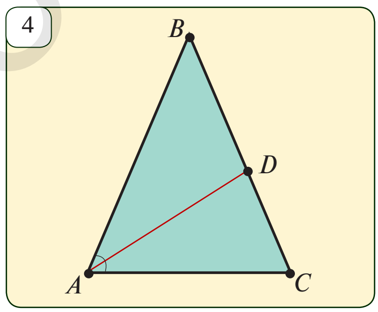
23.5. Докажите, что середины сторон ромба — вершины прямоугольника.

23.6. Постройте треугольник ABC. Постройте треугольник $A_1B_1C_1$ подобный данному, если его площадь в 9 раз меньше площади треугольника ABC.

23.7*. Точки E и F – середины сторон CD и BC параллелограмма $ABCD$ соответственно. Докажите, что прямые AF и AE делят диагональ BD на три равные части (*рис.* 2).

23.8. На рис.3 изображен флаг Узбекистана, установленный около дворца Дружбы народов в Ташкенте и являющимся самым большим в стране. Известно, что размеры флага 20 *м* х 30 *м*, определите высоту флагштока, используя данные рисунка.

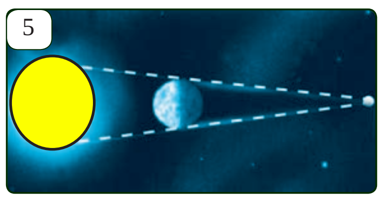
23.9. Биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника отсекает от него треугольник, подобный данному. Найдите углы треугольника рис. 4, ($AB = BC$, $\Delta ABC \backsim \Delta CAD$).



4

23.10. Постройте окружность и отметьте на ней точку O. Постройте окружность — гомотетичную данной окружности при гомотетии с центром O и коэффициентом, равным 2.

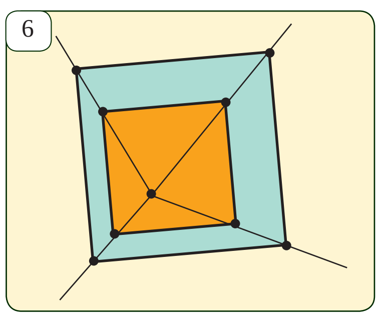
23.11. Периметры двух подобных многоугольников относятся как 2:3. Найдите площадь меньшего многоугольника, если площадь большего 27.

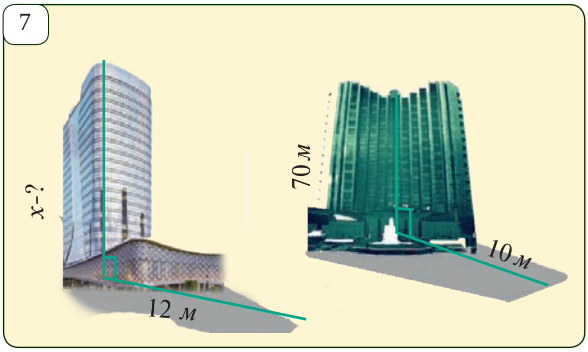

5

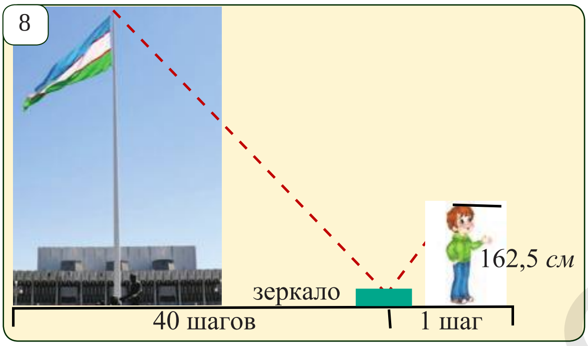
23.12. На *рис.* 2 изображено полное солнечное затмение. Найдите расстояние от Земли до Солнца, если радиусы Солнца и Луны равны 695 500 и 1737 км соответственно и расстояние от Земли до Луны равно 384467 *км*.

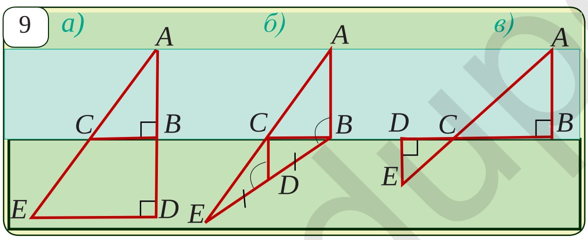
23.13. Будут ли равными два подобных многоугольника, если они: а) вписаны в окружность; б) описаны около окружности?

23.14*. Стороны одного квадрата параллельны сторонам другого. Докажите, что если эти квадраты не равны, то они гомотетичны (*рис.* 6).


6







23.15. Стороны AB и BC треугольника ABC поделены на четыре равные части и точки деления соединены отрезками, параллельными стороне AC. Найдите длины полученных отрезков, если $AC = 24$ *см*.

23.16. Если фотографии двух зданий на *рис.* 7 сделаны одновременно, то найдите высоту первого здания.

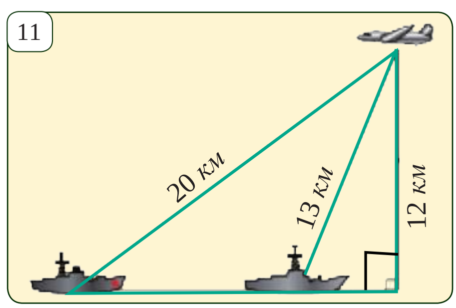
23.17. Используя данные *рис.* 8, объясните, как можно найти высоту конкретного объекта. Найдите высоту флагштока флага нашей Родины, установленного возле дворца Дружбы народов.

23.18. Используя данные *рис.* 9, объясните, как можно найти ширину реки тремя способами. Определите, какие геометрические теоремы в них используются. Попробуйте применить изученные способы в различных ситуациях.

Геометрия и военное дело.

1. Военные могут определять расстояние до цели при помощи линейки и вытянутой руки. Пусть на линейке танку соответствует отрезок длиной 10 см, расстояние от плеча до линейки равно 50 см, а истинная длина танка равна 6,86 *м* (рис.10). Найдите расстояние до танка.

2. Летчик летит на самолете на высоте 12 *км*. Он обнаружил плывущий на расстоянии 13 *км* корабль и преследующий его другой корабль, который находится на расстоянии 20 *км* от самолета (*рис.*11). Найдите расстояние между кораблями.



24 ПРОВЕРЬТЕ СВОИ ЗНАНИЯ

I. Тесты

1. Найдите неверное утверждение относительно двух подобных треугольников:
   A) Отношение их площадей равно коэффициенту подобия.
   B) Отношение соответствующих медиан равно коэффициенту подобия.
   C) Отношение соответствующих биссектрис равно коэффициенту подобия.
   D) Отношение соответствующих высот равно коэффициенту подобия.
2. Найдите верное утверждение относительно двух гомотетичных многоугольников:
   A) Они равны. C) Они равновелики.
   B) Они подобны. D) Правильный ответ не приведен.
3. Укажите неверное утверждение, относящееся к медианам треугольника:
   A) Пересекаются в одной точке.
   B) Точка пересечения делит их в отношении 2:1.
   C) Они равны. D) Делят любой треугольник на равновеликие части.
4. Укажите неверное утверждение, относящееся к биссектрисам треугольника:
   A) Пересекаются в одной точке. B) Точка пересечения делит их в отношении 2:1.
   C) Делят сторону, на которую опущены, на части, пропорциональные прилежащим сторонам.
   D) Делят пополам угол при вершине, из которой исходят.
5. Найдите неверное утверждение относительно двух подобных многоугольников:
   A) Они имеют одинаковое число сторон.
   B) Они имеют одинаковое число углов.
   C) Их сходственные стороны пропорциональны.
   D) Отношение их площадей равно коэффициенту подобия.

II. Задачи

24.1. Через точку пересечения диагоналей трапеции с основаниями 6 *м* и 12 *м* проведена прямая. Найдите длину части прямой внутри трапеции.

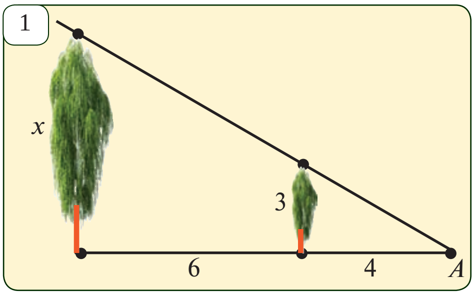
24.2. В треугольнике ABC $BC = BA = 10$, $AC = 8$. Пусть AA_1 и CC_1 биссектрисы треугольника. Найдите отрезок A_1C_1.

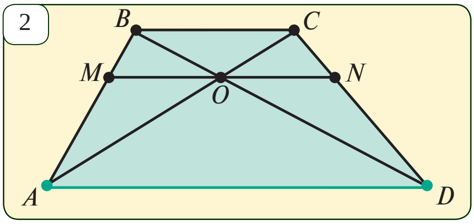
24.3. Для того, чтобы найти расстояние от точки A до недоступной точки B выбрали точку C. После этого измерили расстояние AC, углы BAC и ACB и был построен подобный треугольнику ABC треугольник $A_1B_1C_1$. Оказалось, что $AC = 42$ *м*, $A_1C_1 = 6{,}3$ *см*, $A_1B_1 = 7{,}2$ *см*. Найдите AB.

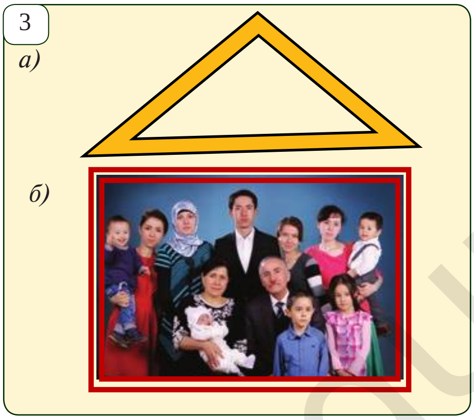
24.4. При гомотетии с коэффициентом $k = 3$ многоугольник F переходит во многоугольник F_1. Пусть периметр многоугольника F_1 равен 12 *см*, а площадь − 4,5 *см*^{2}. Найдите периметр и площадь многоугольника F.

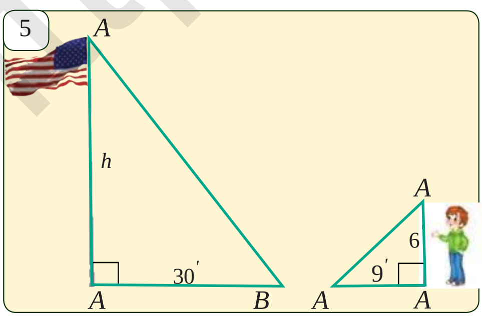
24.5. Найдите высоту телеграфного столба, когда отбрасываемая им тень имеет длину 4 *м*, а человек ростом 180 *см* в этот момент времени отбрасывает тень длиной 2,4 *м*.

24.6. Расстояние от Ташкента до Ургенча на карте масштаба 1:10000000 равно 8,67 *см*. Чему равно истинное расстояние от Ташкента до Ургенча?









III. Проверьте себя (образец контрольной работы)

24.7. По данным рис. 1 найдите высоту дерева.

24.8. Пусть длины сторон треугольника *ABC*: *AB* = 5 *см*, *AC* = 6 *см*, *BC* = 1 *см*. Прямая, параллельная стороне *AC*, пересекает сторону *AB* в точке *P*, а сторону *BC* в точке *K*. Найдите периметр треугольника *PBK*, если *PK* = 2 *см*.

24.9. На рис. 2 $AD||BC||MN$. Найдите отрезок *MN*, если *BC* = 6 *см*, *AD* = 10 *см*;

24.10. *(Дополнительно)*. Докажите, что середины сторон ромба являются вершинами некоторого прямоугольника.

Занимательные задачи

1. Как изменится величина угла в 2°, если рассматривать его через лупу с 4-кратным увеличением?

2. а) на рисунке изображен чертежный треугольник. Будут ли подобными внутренний и внешний треугольники (рис. 3-а)?

б) будут ли подобными внутренний и внешний прямоугольники рамы картины на рис. 3-б?

3. а) На 4-рисунке изображена русская игрушка “матрёшка”. Выполнив соответствующие измерения, найти коэффициент подобия игрушек:
а) *A* и *B*; б) *A* и *D*; в) *C* и *F*; г) *B* и *E*.

б) Darnell is curious about the height of a flagpole that stands in front of his school. (pic.5) Darnell, who is 6 ft tall, casts a shadow that he paces off at 9 ft. He walks the length of the shadow of the flagpole, a distance of 30 ft. How tall is the flagpole?

в) The distance across a pond is to be measured indirectly by using similar triangles. (pic.6) If XY =160 ft, YW=40 ft, TY= 120 ft, and WZ= 50 ft, find XT.

Геометрическое моделирование

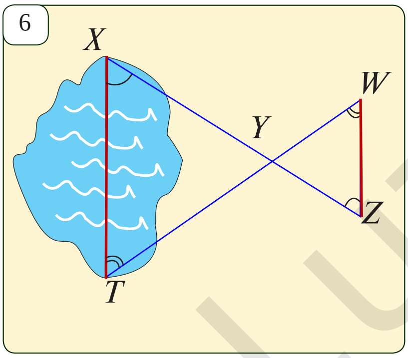
1. Нарисуйте произвольный четырехугольник и вырежьте его ножницами.

2. Отметьте середины противоположных сторон, соедините их отрезками (рис 7.a) и разрежьте четырехугольник вдоль этих отрезков (рис 7.b).

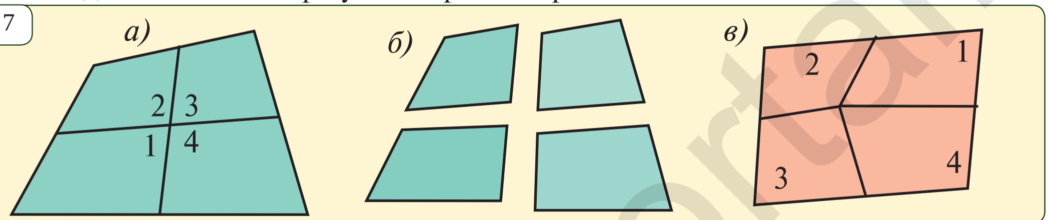
3. Составьте из полученных частей параллелограмм, как показано на рисунке 7.c.

4. Обоснуйте, что в результате проделанной работы действительно образуется параллелограмм.

6



7



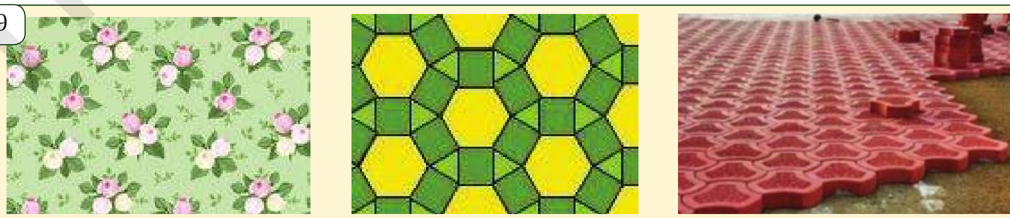
Мозаики, бордюры и паркеты

Если вы присмотритесь к обоям на стенах дома, то увидите, что одна и та же фигура повторяется вновь и вновь во всю стену. Если какая-либо фигура повторяясь вновь и вновь , заполняет всю плоскость, то полученный узор называется мозаикой. Известный голландский художник Морис Эшер создал яркие примеры мозаик (рис. 8). Определите, какая фигура в этих мозаиках повторяется.

8

Если какая-либо фигура повторяясь вновь и вновь , заполняет полосу между двумя параллельными прямыми, то полученный узор называется решеткой или бордюром. Рулон обоев, рулон материи с узором, а также решетки в парках являются примерами ограниченных бордюров (рис. 9).

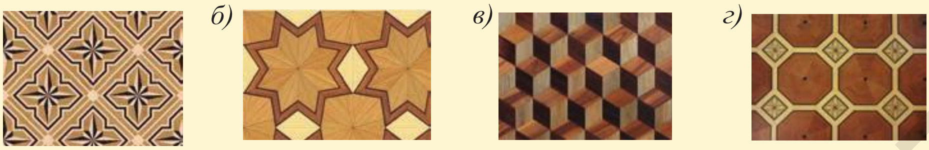
9



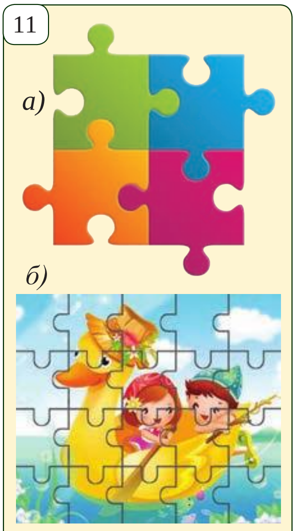
Паркет — разбиение плоскости многоугольниками без пробелов и перекрытий.

Полы некоторых домов покрываются паркетом. На рис.10 приведены простейшие паркеты. Очевидно, что все они переходят в себя при параллельном переносе.

10 а) б) в) г)



11 а) б)



Геометрическое моделирование.
Как изготавливаются фрагменты пазла?

Знаешь ли ты пазл - игру-головоломку? (*рис.*11). Посмотрим, как можно ее изготовить.

1. Нарисуйте квадрат размером 5 см х 5 см.

2. Отрежьте кружок около середины нижней стороны (*рис.*12.*а*).

3. Перенесите и соедините отрезанный кружок с серединой верхней стороны квадрата (*рис.*12.*b*).

4. Теперь отрежьте кружок около середины боковой стороны (*рис.* 12.*в*).

3. Перенесите отрезанный кружок и соедините отрезанный кружок с серединой второй боковой стороны квадрата (*рис.*12.*г)*.

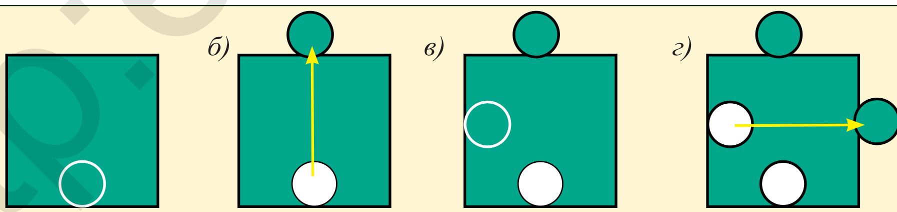
4. В результате получится фрагмент пазла.

5. Обоснуйте возможность того, что фрагментами можно покрыть всю плоскость.

6. Используя вместо кружков другие фигуры, можно создавать другие виды фрагментов пазла.

7. Нарисуйте чертеж новой игры-головоломки. Вырезав несколько фрагментов, составьте из них мозаику.

12 а) б) в) г)



Геометрическое исследование.

Опираясь на данные раздела «Геометрическое моделирование» на стр. 73, докажите, что с помощью произвольного выпуклого четырехугольника можно покрыть всю плоскость.

Глава II

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА

В результате изучения этой главы вы приобретете следующие знания и практические навыки:

Знания:

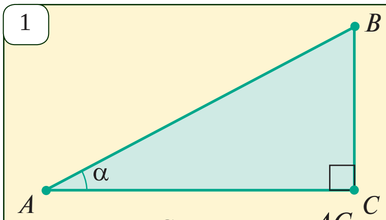
√ *знать определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса произвольного угла;*
√ *знать радианную меру угла;*
√ *знать основные тригонометрические тождества;*
√ *знать формулу вычисления площади треугольника с помощью синуса его угла;*
√ *знать теоремы синусов и косинусов.*

Практические навыки:

√ *Вычислять значения синусов, косинусов, тангенсов и котангенсов некоторых углов;*
√ *применять основные тригонометрические тождества;*
√ *вычислять площадь треугольника по двум сторонам и синусу угла между ними;*
√ *применять теоремы синусов и косинусов при решении задач на вычисления и доказательства.*

25 СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС И КОТАНГЕНС УГЛОВ ОТ 0° ДО 180°

1



$\sin\alpha = \dfrac{BC}{AB}$; $\cos\alpha = \dfrac{AC}{AB}$;

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{BC}{AC}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{AC}{BC}$;

Пусть в прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90°$. Известно, что синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла A определялись как на *рис.* 1. Теперь определим синус, косинус, тангенс и котангенс угла от 0° до 180°.

Рассмотрим полуокружность с центром в начале координат и радиусом, равным единичному отрезку (*рис.* 2). Проведем луч OP, пересекающий полуокружность в точке M (x, y). Обозначим через α угол, образованный этим лучом и лучом Ox. В случае, когда луч OP совпадает с лучом Ox, угол примем равным 0°.

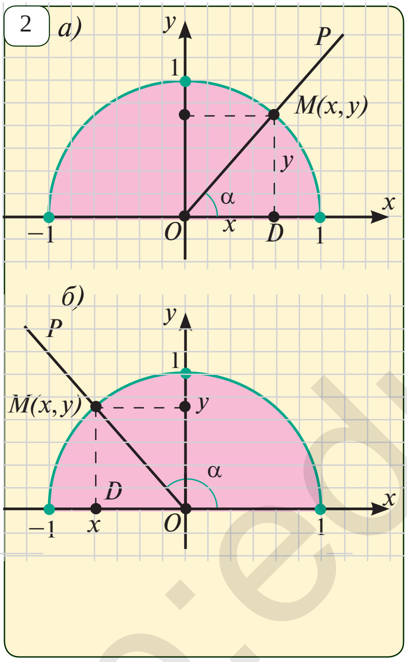
В случае, когда α - острый угол (*рис.* 2.*а*), синус, косинус, тангенс и котангенс этого угла определяются из прямоугольного треугольника ODM по формулам

$\sin\alpha = \dfrac{DM}{MO}$; $\cos\alpha = \dfrac{OD}{MO}$; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{DM}{OD}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{OD}{DM}$.

Если учесть, что $MO = 1$, $DM = y$, $OD = x$ получим равенства,

$$\sin\alpha = y, \quad \cos\alpha = x, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y} \qquad (1)$$

2



В общем случае для угла α от 0° до 180° его синус, косинус, тангенс и котангенс определим также по формуле (1) (*рис.*2.*б*).

В треугольнике OMD $OD^2 + DM^2 = MO^2$ или $x^2 + y^2 = 1$. $\sin\alpha = y$ и $\cos\alpha = x$ для любого угла α $(0° \le \alpha \le 180°)$, то получим основное тригонометрическое тождество: $\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \quad (2)}$

Так как по определению, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{x}{y}$, $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$, то верны тождества

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \ (\alpha \ne 90°)} \qquad \boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \ (\alpha \ne 0, \ \alpha \ne 180°),} \qquad \boxed{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1 \ (\alpha \ne 0, \ \alpha \ne 90°, \ \alpha \ne 180°)}$$

Разделив обе части равенства (2) сначала на $\cos^2\alpha$, а затем на $\sin^2\alpha$, получим тождества

$$\boxed{1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \ (\alpha \ne 90°),} \qquad \boxed{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}, \ (\alpha \ne 0, \ \alpha \ne 180°)} \qquad (3)$$

Равенства (1) сопоставляют каждому углу α ($0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$ одно значение синуса (косинуса, тангенса и котангенса). Эти соответствия определяют функции, называемые «синусом», «косинусом», «тангенсом» и «котангенсом». Они также называются тригонометрическими функциями.

Слово «тригонометрия» означает с греческого «решение треугольника».

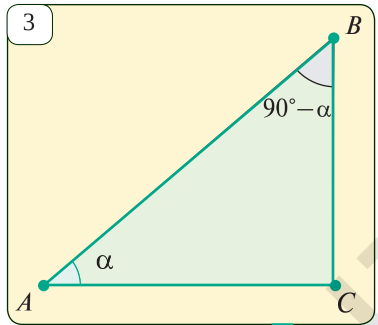
Для каждого острого угла

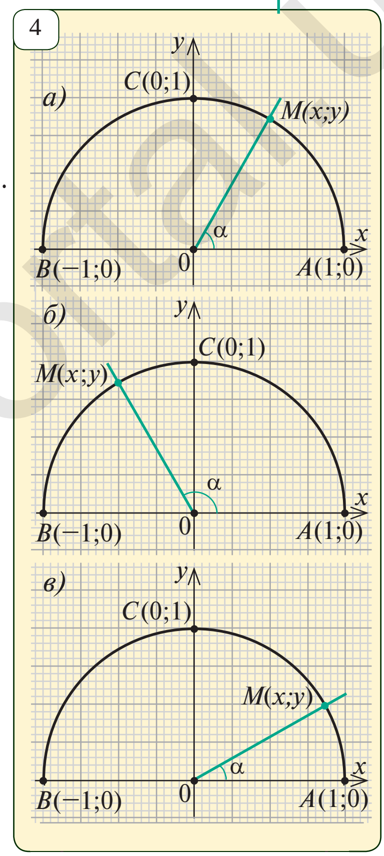
$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$. (4)

Для каждого угла α ($0 \le \alpha \le 180^\circ$):

$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$. (5)

Формулы (4) и (5) называются формулами приведения. Они будут доказаны в курсе алгебры.





Задачи и задания.

25.1. Пусть $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Определите знаки значений $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

25.2. На *рис.* 4 измерьте угол α и найдите его синус, косинус, тангенс и котангенс, произведя соответствующие измерения.

25.3. Докажите тождества $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$ ($\alpha \ne 0^\circ$) и $\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$ ($\alpha \ne 0^\circ$).

25.4. Докажите тождества $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$ ($\alpha \ne 90^\circ$) и $\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$ ($\alpha \ne 0^\circ$ и $\alpha \ne 180^\circ$).

25.5. Упростите:

а) $\cos^2(180^\circ - \alpha) + \cos^2(90^\circ - \alpha)$;

б) $\sin^2(180^\circ - \alpha) + \sin^2(90^\circ - \alpha)$;

в) $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$; г) $\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha)$.

25.6. В треугольнике *ABC* $\angle A = 150^\circ$ и $AC = 7$ *см* Найдите высоту, опущенную из вершины *C*.

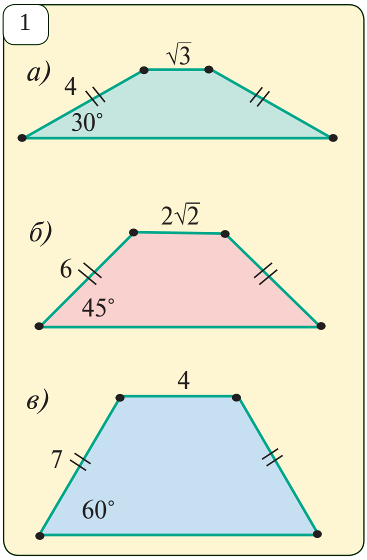
25.7. Пусть а) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sin\alpha = \frac{1}{4}$; в) $\sin\alpha = 1$ Найдите, $\cos\alpha$.

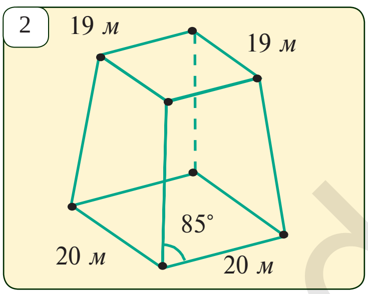
25.8*. Пусть а) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; б) $\operatorname{tg}\alpha = -1$; в) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Найдите, α.

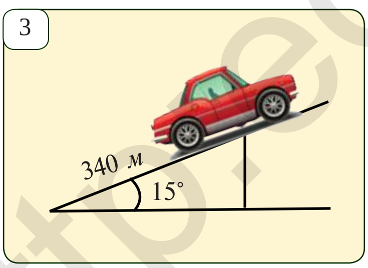
25.9. Заполните таблицу

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sinα									
cosα									
tgα									
ctgα									

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ







26.1. Найдите периметр и площадь ромба, если его острый угол 30°, а высота равна 3 *см*.

26.2. Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника равна 12 *м*. Найдите его площадь.

26.3. Найдите периметр равностороннего треугольника с высотой $4\sqrt{3}$ *см*.

26.4. Используя данные рис.1, найдите площадь рабнобедренной трапеции.

26.5. В прямоугольной трапеции острый угол равен 30°, высота равна 4 *см*, а меньшее основание равно 5 *см*. Найдите периметр и площадь трапеции.

26.6. Хорда окружности стягивает дугу в 120 градусов. Найдите длину хорды, если радиус окружности равен 10 *см*.

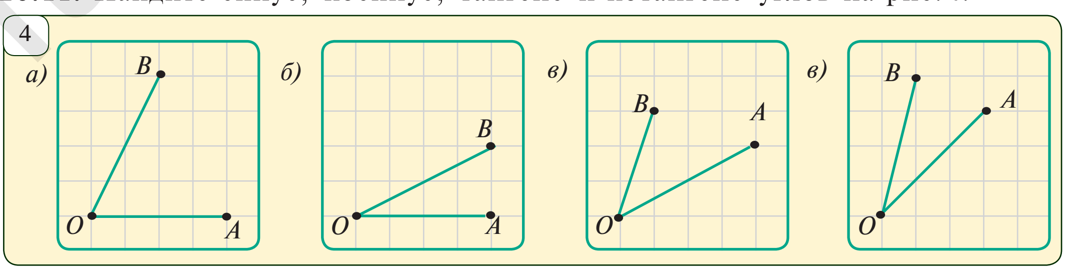
26.7*. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен а) 120°; б) 90°; в) 60°. Найдите отношение высоты треугольника к его основанию.

26.8*. На *рис.*2 изображен хлопковый хирман. Его боковые грани есть равнобедренная трапеция, а верхняя грань – квадрат. Используя данные задачи, определите, сколько материи уйдет, чтобы полностью накрыть хирман?

26.9. Чтобы подняться на вершину перевала, легковая машина преодолела путь в 340 *м*. Найдите высоту, на которую поднялась легковая машина, если уклон дороги по отношению с уровнем горизонта равен 15° .

26.10. Ашрафжон вышел из дома и прошел на восток 800 м, затем прошел на север 600 м. На сколько метров он отдалился от дома? Под каким углом по отношению к западу он теперь должен идти, чтобы прямиком попасть домой?

26.11. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс углов на рис.4.



26.12. Движущийся поезд через каждые 30 *м* пути поднимается на 1 *м*. Найдите угол между железной дорогой и уровнем горизонта.

26.13. Здание высотой 30 м отбрасывает тень длиной 45 *м*. Найдите угол, который образует луч солнечного света с поверхностью земли.

26.14. Один из углов прямоугольного треугольника равен 60°, больший катет равен 6. Найдите меньший катет и гипотенузу.

26.15. На касательной к окружности с центром в точке O, проведенной через точку A отмечена точка B. Найдите радиус окружности и отрезок BO, если $AB=9$ *см*, $\angle ABO=30°$.

26.16. Даны прямая m и не пересекающий ее отрезок AB. При этом $AB=10$, угол между AB и m равен 60°. Из концов отрезка AB на прямую опущены перпендикуляры AC и BD. Найдите отрезок CD.

26.17. Острый угол ромба равен 60°, высота равна 6. Найдите длину большей диагонали и площадь ромба.

26.18. В окружность радиуса 5 *см* вписана равнобокая трапеция. Найдите боковую сторону и площадь трапеции, если ее острый угол равен 30°.

26.19. Найдите радиус описанной около прямоугольника $ABCD$ окружности и площадь прямоугольника, если $AB = 4$, $\angle CAD = 30°$

26.20. Стороны прямоугольника 3 *см* и $\sqrt{3}$ *см*. Найдите углы, которые одна из его диагоналей образует с его сторонами.

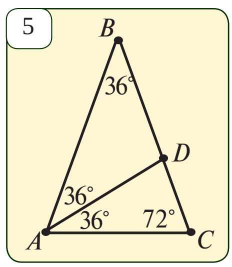
26,21. Постройте угол A, если а) $\sin A=\frac{4}{7}$; б) $\cos A=\frac{4}{7}$; в) $\cos A=-\frac{4}{7}$.

26.22. Один из углов прямоугольного треугольника 30°, высота, опущенная на гипотенузу, равна 6 см. Найдите стороны треугольника.

26.23. Найдите площадь ромба, если его острый угол 30°, а высота равна 4 см.

Исторические этюды. "Золотой треугольник"

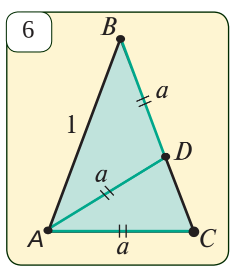
Древние греки называли равнобедренный треугольник с углами 36°, 72° и 72° "золотым треугольником". Причина этого в следующем замечательном его свойстве: биссектриса AD угла при основании разбивает его на два равнобедренных треугольника (*рис.* 5).



Действительно, так как AD - биссектриса, углы BAD и DAC равны 36° каждый. Значит, треугольник ABD равнобедренный. В треугольнике ADC угол ADC равен углу ACD, так как его величина равна 180° - 36° - 72°=72°. Значит, треугольник ADC также равнобедренный.

Следствие. Треугольник ABC подобен треугольнику ACD и

$$\frac{AC}{AB}=\frac{CD}{AC}. \qquad (1)$$



Если в треугольнике ABC боковые стороны возьмем равными $AB = BC = 1$, то его основание можно найти следующим образом (рис 2): $AC= a$

Тогда: 1. $AD=a$, так как ΔACD равнобедренный.

2. $BD=a$, так как ΔABD равнобедренный.

3. $CD=BC-BD=1-a$.

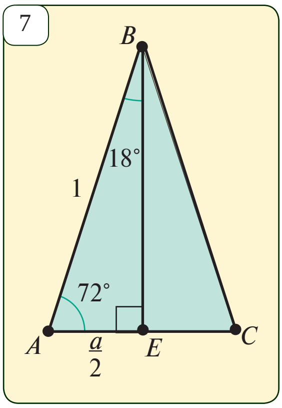
Согласно равенству (1) : $\frac{a}{1}=\frac{1-a}{a}$, $a^2+a-1=0$.

Решив это квадратное уравнение, получим, что $a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Задача. Вычислите значения $\sin 18°$, $\cos 18°$, $\sin 72°$, $\cos 72°$.

Решение: Рассмотрим "золотой треугольник" ABC, в котором боковые стороны $AB=BC=1$ и основание $AC=$ $a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (рис.7).

Проведем его высоту BE. Из прямоугольного треугольника ABE



$$\sin 18° = \frac{AE}{AB} = \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

С помощью этого значения найдем остальные величины:

$$\cos 18° = \sqrt{1-\sin^2 18°} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4};$$

$$\sin 72° = \sin(90°-18°) = \cos 18° = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4};$$

$$\cos 72° = \sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Ответ: $\sin 18° = \cos 72° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$; $\cos 18° = \sin 72° = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

Исторические этюды

Мирзо Улугбек (1394-1449) – великий узбекский ученый и государственный деятель. Его настоящее имя Мухаммад Тарагай. Он был внуком Амира Темура. Отец Улугбека – Шахрух, также был государственным деятелем.

Примерно в 1425-1428 гг. Улугбек строит на холме Оби Рахмат неподалеку от Самарканда свою знаменитую астрономическую обсерваторию. Трехэтажное здание обсерватории оборудовано его основным инструментом - квадрантом высотой 50 м.

Самое знаменитое произведение Улугбека - астрономические таблицы, названные "Зиджи Гурагани". Эти таблицы включали в себя 1018 звезд. Привлекают внимание также тригонометрические таблицы Улугбека.

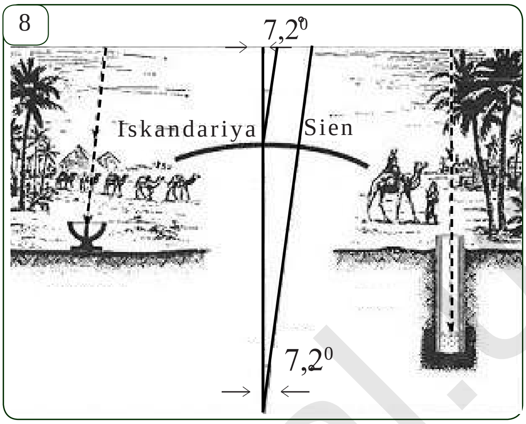
Тригонометрические таблицы вычислены с точностью до 10 знаков. Вероятно, что во время отсутствия счетных устройств для выполнения такой работы потребовались глубокие теоретические знания и формулы, основанные на строгих рассуждениях, а также многочисленные вычислители.

Отметим, что в зиджи Улугбек посвятил отдельную главу вычислению синуса угла в 1 градус.

Проектная работа «Геометрия и астрономия»

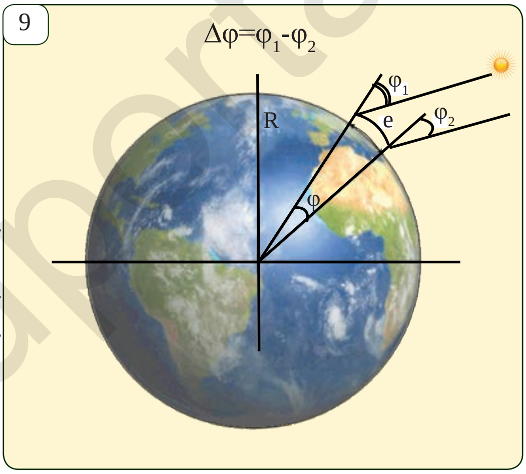
Древнегреческий ученый Эратосфен (276-194 гг. до нашей эры) первым измерил размеры Земли. 19 июня 240 годы до нашей эры он определил, что в городе Сиене (ныне Асуан в Египте) в полдень солнце стояло строго вертикально, в то время как в Александрии, лежащей примерно на этом же меридиане, солнечный свет отклонялся от вертикали на угол, соответствующий 1/50 окружности Земли.

8



К какому выводу пришел Эратосфен? Продолжьте его рассуждения и исходя из рис.8 найдите радиус Земли.

9



Некоторые необходимые данные и вычисления.

Расстояние между Сиеной и Александрией равно 787,5 *км*.

1/50 окружности Земли соответствует - $\alpha = 7{,}2^\circ$. Пусть C - длина окружности Земли то,

$$\frac{\alpha^\circ}{360^\circ} = \frac{787{,}5}{C}.$$

Отсюда $C = 360 \cdot 787{,}5 : 7{,}2 = 39\ 375$ *км*.

Согласно современным данным, длина окружности по экватору равна 40 075,017 *км*, по нулевому меридиану 40 007,86 *км*. Как мы видим, древнегреческий ученый ошибся незначительно.

Задание. Используя *рис*.9, разработайте и обоснуйте практический метод определения длины окружности Земли в произвольный момент времени.

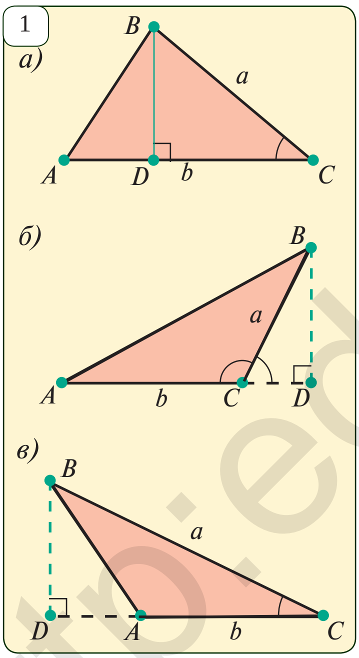
27 ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА ПРИ ПОМОЩИ СИНУСА УГЛА

***Теорема 1.* Площадь треугольника равна половине произведения его сторон на синус угла, заключенного между ними.**

$\Delta ABC,\ BC=a,\ AC=b,\ \angle C$ (*рис.*1) $\Rightarrow$ $S_{ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C$

Доказательство. Опустим высоту BD треугольника ABC. Возможны три случая (*рис.* 1). Рассмотрим первый случай (*рис.* 1*a*). В треугольнике BCD справедливо равенство $\sin C=\frac{BD}{BC}$. Отсюда $BD = BC\cdot\sin C = a\cdot\sin C$. Таким образом, $S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD=\frac{1}{2}\cdot b\cdot a\cdot\sin C=\frac{1}{2}ab\sin C$.

Второй и третий случаи рассмотрите самостоятельно. *Теорема доказана.*



Для вычисления площади треугольника, согласно теореме 1, можно также использовать формулы

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A \quad \text{и} \quad S_{ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B$$

Задача 1. Площадь треугольника ABC равна 24 *см*^{2}. Найдите сторону AB, если $AC=8$ *см* и $\angle A=30^\circ$.

Решение. Согласно формуле для вычисления площади треугольника с помощью синуса угла

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A.$$

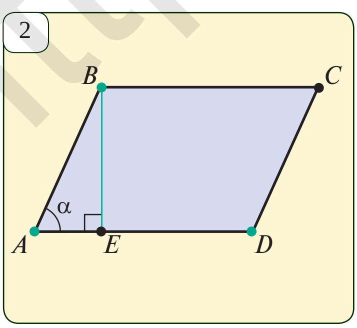
Отсюда,

$$AB=\frac{2S_{ABC}}{AC\cdot\sin A}=\frac{2\cdot 24}{8\cdot\sin 30^\circ}=\frac{2\cdot 24}{8\cdot 0{,}5}=12\ (см).$$

Ответ: 12 *см.*

Задача 2 Докажите, что площадь параллелограмма равна произведению его смежных сторон на синус угла, заключенного между ними.

ABCD параллелограмм, $AB=a,\ AD=b,\ \angle A=\alpha$ (2-*rasm*) $\Rightarrow$ $S_{ABCD}=ab\sin\alpha$

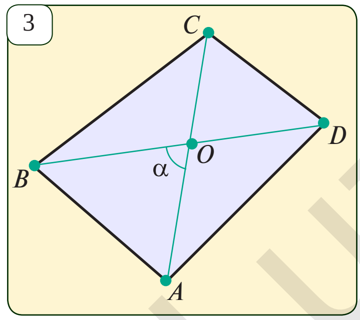


Решение. Опустим высоту BE. В треугольнике ABE $\sin A=\frac{BE}{AB}$ или $BE=AB\sin A=a\sin\alpha$.

Тогда, $S_{ABCD}=AD\cdot BE=ab\sin\alpha$.

Теорема 2. Площадь четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

Доказательство. Рассмотрим углы, образованные при пересечении диагоналей (рис.3):



По условию угол $\angle AOB=\alpha$ вертикальный с $\angle AOB$, то $\angle COD=\alpha$, смежный с $\angle AOB$, то $\angle BOC=180^\circ-\alpha$, вертикальный с $\angle BOC$, то $\angle DOA=180^\circ-\alpha$.

По формуле для вычисления площади треугольника с помощью синуса угла:

$$S_{AOB}=\frac{1}{2}AO\cdot OB\sin\alpha;$$

$$S_{BOC}=\frac{1}{2}BO\cdot OC\sin(180^\circ-\alpha)=\frac{1}{2}BO\cdot OC\sin\alpha;$$

$$S_{COD}=\frac{1}{2}\ CO\cdot OD\sin\alpha; \qquad S_{DOA}=\frac{1}{2}DO\cdot OA\sin(180^\circ-\alpha)=\frac{1}{2}\ DO\cdot OA\sin\alpha.$$

По свойству площадей:

$$S_{ABCD}=S_{AOB}+S_{BOC}+S_{COD}+S_{DOA}=$$

$$=\frac{1}{2}AO\cdot OB\sin\alpha+\frac{1}{2}\ BO\cdot OC\sin\alpha+\frac{1}{2}CO\cdot OD\sin\alpha+\frac{1}{2}DO\cdot OA\sin\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}(AO\cdot OB+BO\cdot OC+CO\cdot OD+DO\cdot OA)\sin\alpha=\frac{1}{2}\{(OB\cdot(AO+OC)+$$

$$+OD\cdot(CO+OA)\}\sin\alpha=\frac{1}{2}(OB\cdot AC+OD\cdot AC)\sin\alpha=\frac{1}{2}\ AC\cdot BD\sin\alpha.$$

Теорема доказана.

Задачи и задания.

27.1. Докажите теорему 1 для случаев, изображенных на рис.1.б и 1.в.

27.2. Найдите площадь треугольника ABC, если: а) $AB=6$ *см*, $AC=4$ *см*, $\angle A=30^\circ$; б) $AC=14$ *см*, $BC=7\sqrt{3}$ *см*, $\angle C=60^\circ$; в) $BC=3$ *см*, $AB=4\sqrt{2}$ *см*, $\angle B=45^\circ$.

27.3. Диагональ прямоугольника 12 *см*, угол между диагоналями 30°. Найдите его площадь.

27.4. Найдите площадь ромба со стороной $7\sqrt{2}$ *см* и тупым углом 135°.

27.5. Большая диагональ ромба 18 *см*, а тупой угол 120°. Найдите площадь ромба.

27.6. В треугольнике ABC, площадь которого равна $6\sqrt{2}$ *см*^{2}, $AB=9$ *см*, $A=45^\circ$. Найдите сторону AC и опущенную на нее высоту.

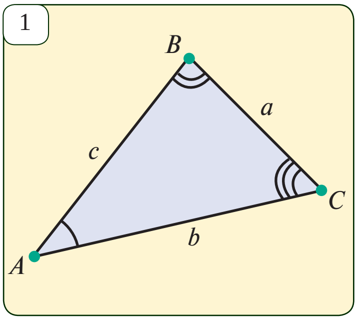
27.7*. Найдите площадь треугольника ABC, если $A=\alpha$, h_b и h_c – высоты, опущенные из вершин B и C, соответственно.

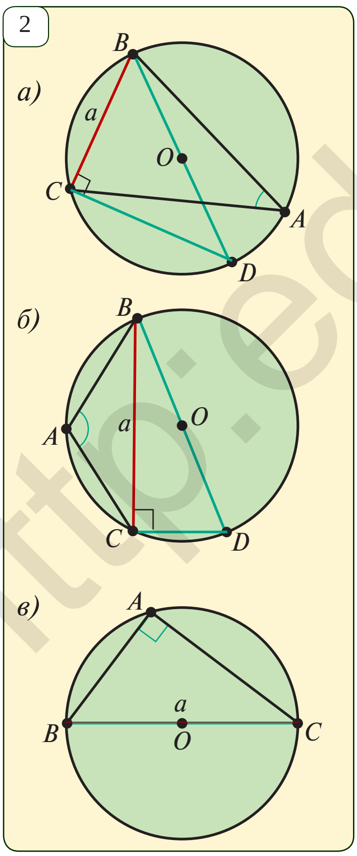
27.8*. Найдите биссектрису AD треугольника ABC, если $AB=8$ *см*, $AC=12$ *см* и $\angle A=60^\circ$ (указание: $S_{ABC}=S_{ABD}+S_{ADC}$).

ТЕОРЕМА СИНУСОВ

Теорема. (Теорема синусов). Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих им углов.

$\Delta ABC,\ AB=c,\ BC=a,\ CA=b$ (*рис.*1) $\Rightarrow$ $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$





Доказательство. По формуле для вычисления площади треугольника через синусы его углов,

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C,\quad S=\frac{1}{2}bc\sin A,\quad S=\frac{1}{2}ac\sin B.\quad (❖)$$

Из первых двух равенств,

$$\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\ bc\sin A, \text{ значит } \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}.$$

Аналогично, из первого и третьего равенств (❖) получим $\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b}{\sin B}$.

Итак, $$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\ .$$

Теорема доказана.

Задача 1. В треугольнике ABC, $AB=14$ *дм*, $\angle A=30^\circ$, $\angle C=65^\circ$ (*рис.* 1). Найдите сторону BC.

Решение: По теореме синусов,

$$\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}$$ Тогда,

$$BC=\frac{AB\cdot\sin A}{\sin C}=\frac{14\cdot\sin 30^\circ}{\sin 65^\circ}\approx\frac{14\cdot 0{,}5}{0{,}9}\approx 7{,}78\ (дм).$$

Примечание: Значения тригонометрических функций можно найти при помощи специальных калькуляторов или таблиц. В нашем случае значение $\sin 65^\circ\approx 0{,}9$ мы нашли из таблицы на стр. 153 учебника. *Ответ:* 7,78 *дм*.

Задача 2. Докажите, что отношение любой стороны треугольника к синусу противолежащего ей угла равно диаметру описанной около треугольника окружности, то есть докажите справедливость формулы (*рис.*2)

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

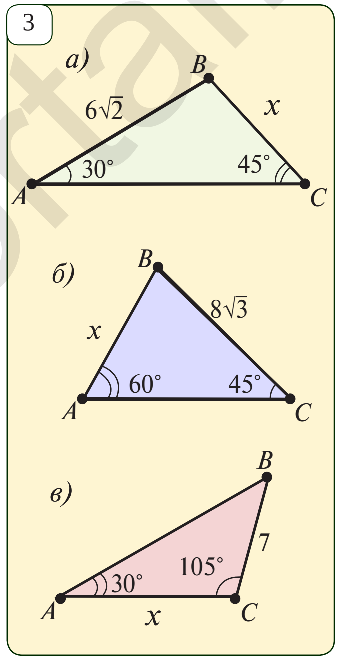
Решение. Ясно, что на основании теоремы синусов достаточно доказать равенство $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$ Возможны три случая:

1-й случай: $\angle A$ — острый угол (рис. 2.а);
2-й случай: $\angle A$ — тупой угол (рис. 2.б);
3-й случай: $\angle A$ — прямой угол (рис. 2.в).

Рассмотрим 1-й случай. Соединим точки C и D. Треугольник BCD — прямоугольный, так как угол $\angle BCD$ опирается на диаметр BD.

В ΔBCD: $BC = BD \cdot \sin D = 2R\sin D$. Но, $\angle D = \angle A$, так как эти вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу ВС. Тогда, $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$. или $BC = 2R\sin A$ Оставшиеся случаи докажите самостоятельно. (Указание: используйте то, что во втором случае $\angle D = 180^\circ - \angle A$, а в 3-м случае $a = 2R$)

Задачи и задания.



28.1. Докажите, что отношение любой стороны треугольника к синусу противолежащего ей угла равно диаметру описанной около треугольника окружности в случаях 2 и 3 задачи 2.

28.2. Найдите искомые отрезки по данным рис. 3.

28.3. По данным для ABC значениям найдите:

а) $\sin C$, если $\sin A = 0{,}4$; $BC = 6$ *см* и $AB = 5$ *см*;

б) $\sin A$, если $\sin B = \dfrac{1}{2}$; $AC = 8$ *дм* и $BC = 7$ *дм*;

в) $\sin B$, если $\sin C = \dfrac{1}{2}$; $AB = 6$ *м* и $AC = 8$ *м*.

28.4. Один из углов треугольника равен 30°, а противолежащая ему сторона 4,8 *дм.* Найдите радиус описанной около треугольника окружности.

28.5. Одна из сторон треугольника равна радиусу описанной окружности. Найдите угол, противолежащий этой стороне. Обратите внимание на необходимость рассмотрения двух случаев.

28.6. Обоснуйте справедливость равенства $AB : BC : CA = \sin C : \sin A : \sin B$ для треугольника АВС. Возможно ли равенство: $\sin A : \sin B : \sin C = 3:5:7$?

28.7. В треугольнике ABC найдите сторону AB и углы B и C, если $BC = 20$*м*. $AC = 13$ *м* и $\angle A = 67^\circ$.

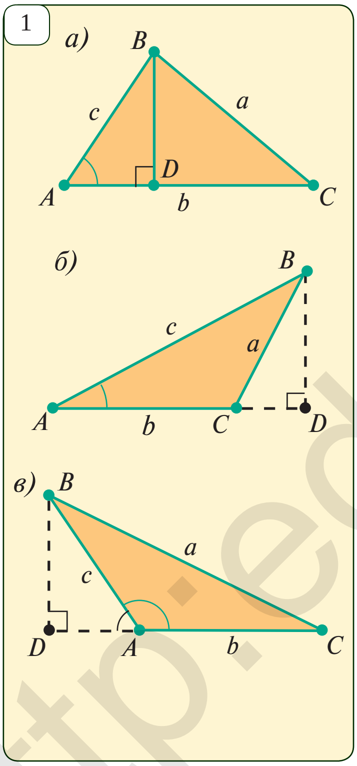
28.8*. В треугольнике ABC найдите угол C и стороны AB и AC, если $BC = 18$ *дм*, $\angle A = 42^\circ$, $\angle B = 62^\circ$

29 ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ

В прямоугольном треугольнике квадрат стороны, лежащей напротив прямого угла (гипотенузы), равен сумме квадратов двух других сторон (катетов). А как обстоит дело, если угол не является прямым? Об этом речь пойдет в следующей теореме.

***Теорема.* (Теорема косинусов). Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.**

$\Delta ABC,\ AB=c,\ BC=a,\ CA=b$ (*рис.*1) ⇒ $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$



Доказательство. В треугольнике ABC опустим высоту BD. Точка D может лежать на стороне AC (*рис.*1.*а*) или на ее продолжении (1.*б и* 1.*в*). Рассмотрим первый случай. В треугольнике BCD по теореме Пифагора

$$BC^2=BD^2+DC^2.$$

Так как $DC=AC-AD$, то:

$$BC^2=BD^2+(AC-AB)^2=BD^2+AC^2-2\cdot AC\cdot AD+AD^2.$$

Принимая во внимание, что в треугольнике ABD : $BD^2+AD^2=AB^2$ и $AD=AB\cos A$ из последнего равенства получаем

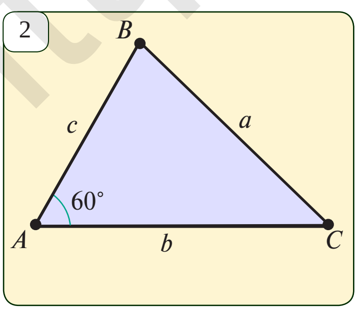
$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A,$$

т.е. $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$

Теорема доказана.

Докажите теорему косинусов самостоятельно для случаев, показанных на *рис.*1.б, где $DC=AD-AC$, и на рис. 1.в, где $DC=AD+AC$ используя равенство $\cos(180^\circ-A)=-\cos A$.

Примечание. Теорема косинусов также является обобщением теоремы Пифагора. При $\angle A=90^\circ$ теорема Пифагора следует из теоремы косинусов (так как $\cos 90^\circ=0$).



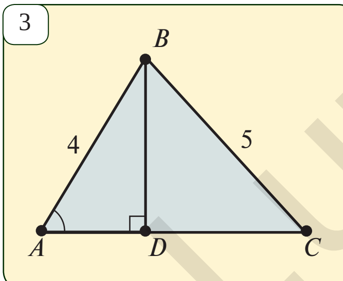
Задача 1 Пусть в треугольнике ABC : $AB=6$ *см*, $AC=7$ *см*, $A=60^\circ$ (рис. 2). Найдите сторону BC.

Решение. Так как по теореме косинусов, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ или $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A$, то

$$BC^2 = 7^2 + 6^2 - 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ = 49 + 36 - 84 \cdot \frac{1}{2} = 43,$$

то есть $BC = \sqrt{43}$ (*см*). *Ответ:* $\sqrt{43}$ *см*.

3



Спомощью теоремы косинусов можно находить углы треугольников, если известны его стороны:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}. \qquad (1)$$

Задача 2. Стороны треугольника ABC $a = 5$ *м*, $b = 6$ *м* и $c = 4$ *м* Найдите проекцию наименьшей стороны на наибольшую (*рис. 3*).

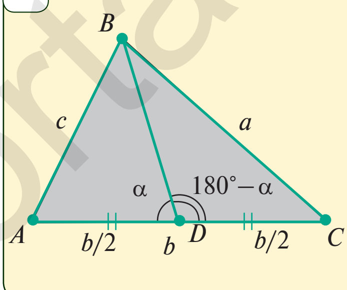
Решение По формуле (1) найдем $\cos A$:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{6^2 + 4^2 - 5^2}{2 \cdot 6 \cdot 4} = \frac{9}{16}.$$

Так как в прямоугольном треугольнике ABD $AD = AB.\cos A$, то $AD = 4 \cdot \frac{9}{16} = 2{,}25$ (*м*).

Ответ: 2,25 *м*.

4



Задачи и задания.

29.1. Докажите теорему косинусов в случаях, изображенных на рис.1.б и 1.в.

29.2. В треугольнике ABC найдите сторону:

а) AB, если $AC = 3$ *см*, $BC = 4$ *см* и $\angle C = 60^\circ$;

б) AC, если $AB = 4$ *м*, $BC = 4\sqrt{2}$ *м* и $\angle B = 45^\circ$;

в) BC, если $AB = 7$ *дм*, $AC = 6\sqrt{3}$ *дм* и $\angle A = 150^\circ$.

29.3. Найдите косинусы углов треугольника со сторонами 5 *см*, 6 *см*, 7 *см*.

29.4. Найдите сторону AC треугольника ABC, если $AB = 10$ *см*, $BC = 12$ *см* и $\sin B = 0{,}6$.

29.5. Диагонали параллелограмма равны 10 *см* и 12 *см*, а угол между ними равен 60°. Найдите стороны параллелограмма.

29.6. Один из углов параллелограмма со сторонами 5 *см* и 7 *см* равен 120°. Найдите его диагонали.

29.7*. Докажите, что длину медианы BD треугольника ABC со сторонами a, b, c можно вычислить по формуле $BD = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$ (*рис. 4*).

29.8*. Найдите медианы треугольника со сторонами 6 *м*, 7 *м* и 8 *м*.

29.9. Найдите биссектрисы треугольника со сторонами 5 *м*, 6 *м* и 7 *м*.

29.10. Найдите высоты треугольника со сторонами 5 *м*, 6 *м* и 7 *м*.

30 НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРЕМЫ СИНУСОВ И ТЕОРЕМЫ КОСИНУСОВ

Доказанные на предыдущих уроках теоремы синусов и косинусов можно эффективно использовать при решении многих задач. На этом уроке мы остановимся на некоторых применениях этих теорем.

1. С помощью теоремы косинусов можно определить вид углов треугольника (острые, прямой или тупые), не находя сами эти углы. Действительно, если в формуле

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

1) Если $b^2+c^2>a^2$, то $\cos A>0$. Значит, A — острый угол;
2) Если $b^2+c^2=a^2$, то $\cos A=0$. Значит, A — прямой угол;
3) Если $b^2+c^2<a^2$, то $\cos A<0$. Значит, A — тупой угол.

Равенство $b^2+c^2=a^2$ или неравенство $b^2+c^2<a^2$ означает, что a — наибольшая из сторон треугольника. Значит, прямой или тупой угол треугольника лежит против наибольшей из его сторон.

В соответствии с величиной угла, противолежащего наибольшей из сторон треугольника, можно сделать вывод о том, каким будет рассматриваемый треугольник (остроугольным, прямоугольным или тупоугольным).

Задача 1. Не находя углов треугольника со сторонами 5 *м*, 6 *м* и 7 *м*, определите его вид.

Решение. Длина стороны, лежащей против наибольшего угла, будет наибольшей. Поэтому, если $a = 7$, $b = 6$, $c = 5$, то $\angle A$ будет наибольшим.

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{36+25-49}{2\cdot6\cdot5}=\frac{12}{60}=\frac{1}{5}>0.$$

Значит, угол A - острый и данный треугольник является остроугольным.

2. С помощью формулы $S=\frac{1}{2}bc\sin A$ для площади треугольника по двум сторонам и углу между ними и формулы $\sin A=\frac{a}{2R}$ можно получить формулу для площади треугольника

$$S=\frac{abc}{4R}$$

и формулу для радиуса описанной около треугольника окружности

$$R=\frac{abc}{4S}.$$

Задача 2. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами $a=5,\ b=6,\ c=10$

Решение. Найдем площадь треугольника по формуле Герона:

$$p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{5+7+10}{2}=11,$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{11(11-5)(11-7)(11-10)}=\sqrt{11\cdot6\cdot4}=\sqrt{264}\approx16{,}3.$$

Таким образом, $R=\dfrac{abc}{4S}\approx\dfrac{5\cdot7\cdot10}{4\cdot16{,}3}\approx5{,}4.$ *Ответ:* $\approx5{,}4$.

Задачи и задания.

30.1. Найдите наибольший и наименьший углы треугольника ABC, если $AB=7$ *см*, $BC=8$ *см*, $CA=9$ *см*.

30.2. Определите, какая из сторон треугольника ABC будет наибольшей и какая наименьшей, если $\angle A=47^\circ$, $\angle B=58^\circ$.

30.3. Определите вид треугольника, если три его стороны равны соответственно:

а) $a=5,\ b=4,\ c=4$; б) $a=17,\ b=8,\ c=15$; в) $a=9,\ b=5,\ c=6$.

30.4. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами: а) 13, 14, 15; б) 15, 13, 4; в) 35, 29, 8; г) 4, 5, 7.

30.5. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка D. Докажите, что отрезок CD меньше хотя бы одной из сторон AC или BC.

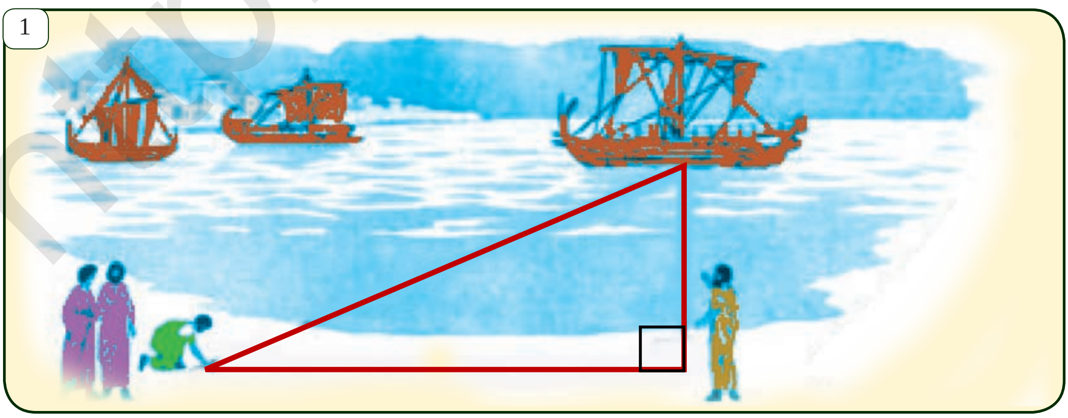
30.6. Докажите, что против большего угла треугольника лежит большая сторона.

30.7. Докажите, что против большей стороны треугольника лежит больший угол.

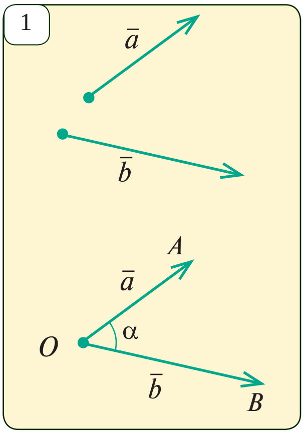
30.8*. В треугольнике ABC проведена медиана CD. Докажите, что угол ACD меньше угла BCD, если $AC>BC$.

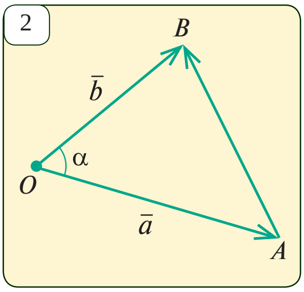
30.9*. Опираясь на *рис.*1, определите, как древние греки определяли расстояние от берега до корабля.

1



31 УГОЛ МЕЖДУ ДВУМЯ ВЕКТОРАМИ И СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВУХ ВЕКТОРОВ





Углом между ненулевыми векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется угол AOB между направляющими отрезками векторов $\overline{OA} = \bar{a}$ и $\overline{OB} = \bar{b}$, исходящими из точки O. Угол между сонаправленными векторами считается равным 0°. Если угол между векторами равен 90°, то эти векторы называются перпендикулярными.

Скалярным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется произведение длин этих векторов на косинус угла между ними.

Если какой-либо из двух векторов является нулевым, то их произведение равно нулю. Скалярное произведение записывается как $\bar{a} \cdot \bar{b}$ или $(\bar{a}, \bar{b})$.

$$(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cos\varphi. \qquad (1)$$

Согласно определению видно, что если скалярное произведение двух векторов равно нулю, то они будут перпендикулярными и наоборот.

Из курса физики известно, что работа A силы $\bar{F}$ по перемещению на вектор $\bar{s}$ равна скалярному произведению:

$$A = (\bar{F}, \bar{s}) = |\bar{F}| \cdot |\bar{s}| \cos\varphi.$$

Свойство. Для векторов $\bar{a}(a_1; a_2)$ и $\bar{b}(b_1; b_2)$: $(\bar{a}; \bar{b}) = a_1b_1 + a_2b_2$.

Доказательство. Перенесем векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ в начало координат O (*рис.* 2). Тогда $\overline{OA} = (a_1; a_2)$ и $\overline{OB} = (b_1; b_2)$. Если заданные векторы не коллинеарны, то ABO − треугольник, для которого справедлива теорема косинусов: $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos\varphi$.

В этом случае $OA \cdot OB \cdot \cos\varphi = \frac{1}{2}(OA^2 + OB^2 - AB^2)$.

Однако, $OA^2 = a_1^2 + a_2^2$, $OB^2 = b_1^2 + b_2^2$ и $AB^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$.

Значит, $(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cos\varphi = OA \cdot OB \cdot \cos\varphi = \frac{1}{2}(OA^2 + OB^2 - AB^2) =$

$$= \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - (b_1 - a_1)^2 - (b_2 - a_2)^2) = a_1b_1 + a_2b_2.$$

В случае коллинеарности ($\varphi = 0°$, $\varphi = 180°$) докажите справедливость этого равенства самостоятельно.

Свойства скалярного произведения векторов

1. $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a}$ – переместительное свойство

2. $(\overline{a}+\overline{b})\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot\overline{c}+\overline{b}\cdot\overline{c}$ – распределительное свойство

3. $\lambda\cdot(\overline{a}\cdot\overline{b})=(\lambda\cdot\overline{a})\cdot\overline{b}=\overline{a}\cdot(\lambda\cdot\overline{b})$ – сочетательное свойство.

4. Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – коллинеарные в одном направлении, то $\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|$, так как $\cos 0^\circ=1$.

5. Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – коллинеарные в противоположных направлениях, то $\overline{a}\cdot\overline{b}=-|\overline{a}||\overline{b}|$, так как $\cos 180^\circ=-1$.

6. $\overline{a}\cdot\overline{a}=|\overline{a}||\overline{a}|\cos 0^\circ=|\overline{a}|^2\Rightarrow\overline{a}^2=|\overline{a}|^2$.

7. Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ взаимно перпендикулярны, то $\overline{a}\cdot\overline{b}=0$.

Следствия:

а) длина вектора $\overline{a}=(a_1;a_2)$: $|\overline{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$; (1)

б) Косинус угла между векторами $\overline{a}=(a_1;a_2)$ и $\overline{b}=(b_1;b_2)$:

$$\cos\varphi=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}\quad\text{или}\quad\cos\varphi=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}}.$$

Задача. Найдите угол между векторами $\overline{a}(1;2)$ и $\overline{b}(4;-2)$.

Решение. Обозначим через α угол между данными векторами. По формуле

$$\cos\alpha=\frac{1\cdot4+2\cdot(-2)}{\sqrt{1^2+2^2}\cdot\sqrt{4^2+(-2)^2}}=\frac{4-4}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}}=0.$$ Значит, $\alpha=90^\circ$. *Ответ:* 90°.

Задачи и задания.

31.1. Пусть для векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ *а)* $|\overline{a}|=4$, $|\overline{b}|=5$, $\alpha=30^\circ$; *б)* $|\overline{a}|=8$, $|\overline{b}|=7$, $\alpha=45^\circ$; *в)* $|\overline{a}|=2{,}4$, $|\overline{b}|=10$, $\alpha=60^\circ$; *г)* $|\overline{a}|=0{,}8$, $|\overline{b}|=\frac{1}{2}$, $\alpha=40^\circ$. Найдите скалярное произведение этих векторов (здесь α — угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$).

31.2. Найдите скалярное произведение векторов и угол между ними: *а)* $\overline{a}(\frac{1}{2};-1)$ и $\overline{b}(2;3)$; б) $\overline{a}(-5;6)$ и $\overline{b}(6;5)$; в) $\overline{a}(1{,}5;2)$ и $\overline{b}(4;-2)$.

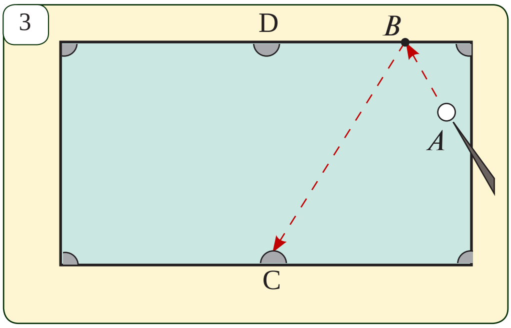
31.3. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O, причем $BD=AB=4$ *см*. Найдите скалярные произведения векторов и углы между ними:
а) $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$; б) $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$; в) $\overline{AD}$ и $\overline{DC}$; г) $\overline{OC}$ и $\overline{OD}$

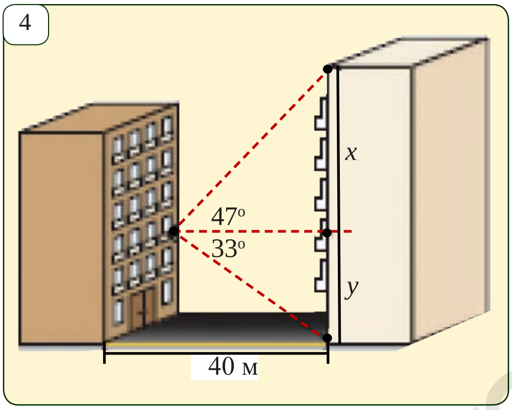
31.4. Пусть даны ненулевые векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Доказать, что при $\overline{a}\cdot\overline{b}=0$ векторы перпендикулярны и наоборот, если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ перпендикулярны, то $\overline{a}\cdot\overline{b}=0$.

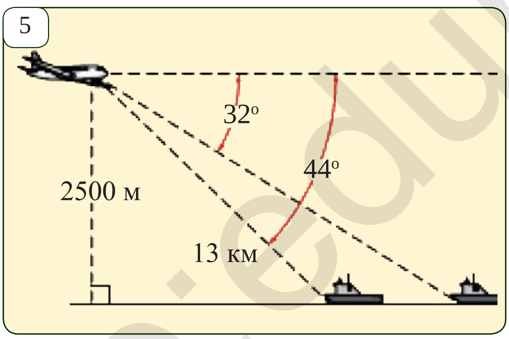
31.5*. При каком значении x будут взаимно перпендикулярными векторы
а) $\overline{a}(4;5)$ и $\overline{b}(x;6)$; б) $\overline{a}(x;1)$ и $\overline{b}(3;2)$; в) $\overline{a}(0;-3)$ и $\overline{b}(5;x)$

31.6. Найдите среди векторов $\overline{a}(3;3)$, $\overline{b}(2;-2)$, $\overline{c}(-1;-4)$ и $\overline{d}(-4;1)$ пары взаимно перпендикулярных.

31.7*. При игре в бильярд шар, находившийся в точке A, после удара по







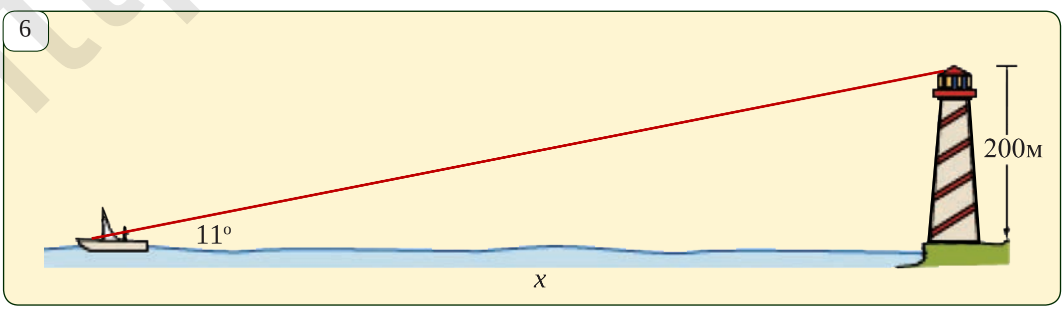
нему попал в лунзу C, отразившись в точке В на стенке стола (рис. 3). Найдите скалярное произведение $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$, если $AB = 40$ *см*, $BC = 150$ *см* и $\angle ABD = 120^\circ$.

31.8. Под действием силы $\overline{F}(-3, 4)$ точка $A(5,-1)$ перешла в положение $B(2, 1)$. Какая работа была совершена?

31.9. Лола проживает на третьем этаже многоэтажного дома. Из окна ее квартиры виден дом, отстоящий от ее дома на расстоянии 40 *м* (*рис.*4). Козырек крыши этого дома виден Лоле под углом 47°, а нижнее основание – под углом 33°. Найдите высоту дома, стоящего напротив.

31.10. Из самолета, летящего на высоте 2500 *м* виден корабль под углом 44° к горизонту, а второй – под углом 32° (*рис.*5). Найдите расстояние между кораблями.

31.11. Рыбаки видят маяк высотой 200 *м* под углом 11° (рис.6). Найдите расстояние от рыбацкой шхуны до берега.



Проектная работа «Геометрия и география».

Из курса географии известно, что положение точки на поверхности Земли определяется своими географическими координатами. На *рис.*7 приведены эти координаты. На нем обозначены:

1- нулевой (гринвичский) меридиан,

2 – меридианы, отстоящие вправо на восток от нулевого,

3 – широты, отстоящие вниз на юг от экватора,

4 – экватор.

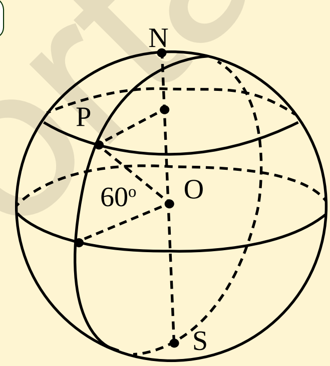
7

Точка пересечения нулевого (гринвичского) меридиана (1) и экватора (4) считается точкой отсчета географических координат.

Часть меридиана от экватора до северного полюса соответствует четверти окружности, то есть дуге в 90°. Аналогично, часть меридиана от экватора до южного полюса также соответствует четверти окружности, то есть дуге в 90°.

Полуокружность, образованная переходом нулевого меридиана на восток, составляет 180° восточной долготы, а полуокружность, образованная переходом нулевого меридиана на запад, составляет 180° западной долготы.

8



1. Найдите географические координаты города Ташкента.

2. Какие еще крупные города приблизительно находятся на одном меридиане со столицей нашей Родины?

3. Найдите расстояния от города Ташкента (вдоль меридиана) до городов Токио, Пекин, Сеул, Вашингтон и Нью-Йорк. (Найдите недостающие данные самостоятельно)

4. Город находится в северном полушарии на широте 60° . Считая, что радиус Земли равен 6400 км, найдите радиус параллели, на которой лежит город.

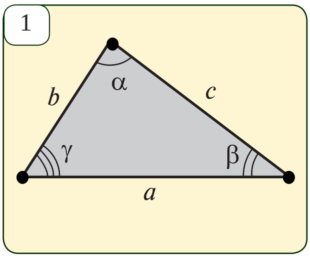
Занимательная геометрия.

Охотник вышел на охоту. Он прошел 1 *км* на юг, затем 1 *км* на восток, а затем 1 *км* на север и оказался в исходной точке. Глядь, стоит медведь!

1. Какого цвета медведь?

2. Для каких точек земного шара возможно подобное путешествие? Живут ли там медведи?

32 РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ



Обозначим стороны треугольника через *a, b, c*, а противолежащие им углы через α, β, γ соответственно (*рис.* 1). Стороны и углы треугольника называются одним словом, а именно его *элементами*.

Нахождение по известным элементам треугольника его неизвестных элементов называется решением треугольника.

Задача 1*. (Решение треугольника по одной стороне и прилежащим к ней углам).* Пусть в треугольнике $a=6$, $\beta=60^\circ$ и $\gamma=45^\circ$. Найдите его третий угол и оставшиеся две стороны.

Решение. 1. Так как сумма трех углов треугольника равна 180°, то

$$\alpha=180^\circ-\beta-\gamma=180^\circ-60^\circ-45^\circ=75^\circ.$$

Зная сторону и три угла треугольника, по теореме синусов найдем оставшиеся две стороны.

2. Так как $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}$ то $b=a\cdot\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}=6\cdot\dfrac{\sin 60^\circ}{\sin 75^\circ}\approx 6\cdot\dfrac{0{,}8660}{0{,}9659}\approx 5{,}3794\approx 5{,}4.$

(значения $\sin 60^\circ$ и $\sin 75^\circ$ можно найти с помощью микрокалькулятора или по таблице на странице 153 учебника).

3. Так как $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{c}{\sin\gamma}$ то $c=a\cdot\dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha}=6\cdot\dfrac{\sin 45^\circ}{\sin 75^\circ}\approx 6\cdot\dfrac{0{,}7071}{0{,}9659}\approx 4{,}3924\approx 4{,}4.$

Ответ: $\alpha=75^\circ$; $b\approx 5{,}4$; $c\approx 4{,}4$.

Задача 2 *(Решение треугольника по двум сторонам и углу, заключенному между ними).* Пусть в треугольнике $a=6$, $b=4$ и $\gamma=120^\circ$. Найдите его третью сторону и оставшиеся два угла.

Решение. 1. Найдем по теореме косинусов третью сторону треугольника:

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}=\sqrt{36+16-2\cdot 6\cdot 4\cdot(-0{,}5)}=\sqrt{76}\approx 8{,}7.$$

2. Теперь, зная все три стороны треугольника, найдем остальные его углы, используя теорему косинусов:

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{4^2+76-6^2}{2\cdot 4\cdot\sqrt{76}}\approx 0{,}8046.$$

Зная, что $\cos\alpha\approx 0{,}8046$ найдем угол α (α — острый угол) из таблицы на стр. 153: $\alpha\approx 36^\circ$.

3. $\beta=180^\circ-\alpha-\gamma\approx 180^\circ-(36^\circ+120^\circ)=24^\circ$.

Ответ: $c\approx 8{,}7$; $\alpha\approx 36^\circ$, $\beta\approx 24^\circ$.

Задача 3*. (Решение треугольника по трем сторонам).* Найдите углы треугольника, если $a=10$, $b=6$ и $c=13$.

Решение: **1.** Определим, каким будет наибольший угол, острым или тупым, по противолежащей ему наибольшей стороне:

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{100+36-169}{2\cdot 10\cdot 6}=-\frac{33}{120}\approx -0{,}275< 0.$$

Значит, C — тупой угол. Учтем это, находя угол C по таблице на стр.153. Острый угол, косинус которого равен 0,275, равен $\angle C_1=74^\circ$. Тогда согласно формуле $\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$,

$$\angle C=180^\circ-\angle C_1=180^\circ-74^\circ=106^\circ.$$

2. По теореме синусов,

$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$. Отсюда, $\sin A=\frac{a\cdot \sin C}{c}=\frac{10\cdot \sin 106^\circ}{13}=\frac{10\cdot \sin 74^\circ}{13}\approx\frac{10\cdot 0{,}9615}{13}\approx 0{,}7396.$

Так как A — острый угол, то по таблице на стр.153 найдем значение $\angle A\approx 47^\circ$.

3. $\angle B\approx 180^\circ-(106^\circ+47^\circ)=26^\circ$. *Ответ:* $\angle A\approx 47^\circ$, $\angle B\approx 26^\circ$, $\angle C\approx 106^\circ$.

Задачи и задания.

32.1. Дана сторона треугольника и прилежащие к ней углы:

а) $a=5$ *см*, $\beta=45^\circ$, $\gamma=45^\circ$; б) $c=20$ *см*, $\alpha=75^\circ$, $\beta=60^\circ$;

в) $a=35$ *см*, $\beta=40^\circ$, $\gamma=120^\circ$; **г)** $c=12$ *см*, $\alpha=36^\circ$, $\beta=25^\circ$.

Найдите третий угол и остальные стороны треугольника.

32.2. Даны две стороны треугольника и угол между ними:

а) $a=6$, $b=4$, $\gamma=60^\circ$; б) $a=14$, $b=43$, $\gamma=130^\circ$;

в) $b=17$, $c=9$, $\alpha=85^\circ$; **г)** $b=14$, $c=10$, $\alpha=145^\circ$.

Найдите оставшиеся углы и третью сторону треугольника.

32.3. Даны три стороны треугольника:

а) $a=2$, $b=3$, $c=4$; б) $a=7$, $b=2$, $c=8$;

в) $a=4$, $b=5$, $c=7$; **г)** $a=15$, $b=24$, $c=18$.

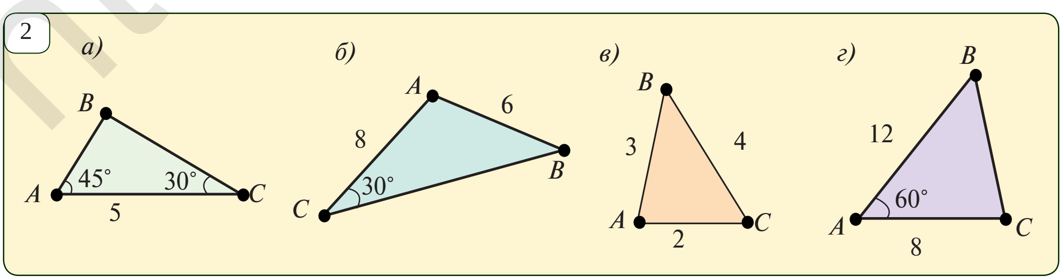
Найдите углы треугольника.

32.4. Втреугольнике заданы две стороны и угол, противолежащий одной из этих сторон. Найдите третью сторону и остальные углы треугольника:

а) $a=12$, $b=5$, $\alpha=120^\circ$; б) $a=27$, $b=9$, $\alpha=138^\circ$;

в) $b=2$, $c=2$, $\alpha=60^\circ$; **г)** $b=6$, $c=8$, $\alpha=30^\circ$.

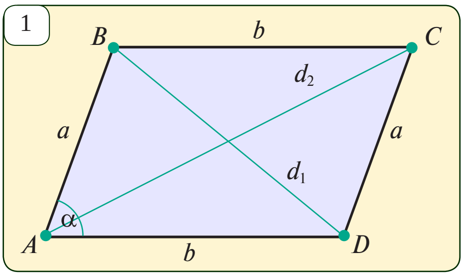
32.5. На основании данных рисунка 2 решите треугольник.



33 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Задача 1. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна удвоенной сумме квадратов его сторон.

$ABCD$ — параллелограмм, $AB=a$, $AD=b$, $BD=d_1$, $AC=d_2$ (рис.1). ⇒ $d_1^2+d_2^2=2(a^2+b^2)$



Решение. Пусть угол при вершине A параллелограмма $ABCD$ равен α. Тогда $\angle B=180°-\alpha$. Применим теорему косинусов к треугольникам ABD и ABC (*рис.* 1):

$$d_1^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha, \qquad (1)$$

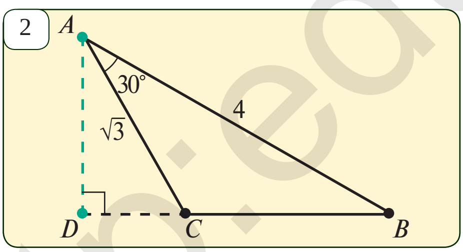
$$d_2^2=a^2+b^2-2ab\cos(180°-\alpha).$$

Учитывая равенство $\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$, получим,

$$d_2^2=a^2+b^2+2ab\cos\alpha. \qquad (2)$$

Почленно сложив соответствующие части равенств (1) и (2), получим искомое равенство $d_1^2+d_2^2=2(a^2+b^2)$.

Задача 2. Найдите высоту AD треугольника ABC, опущенную из вершины A, если $\angle A=30°$, $AB=4$, $AC=\sqrt{3}$ (*рис.* 2).



Решение. 1) С помощью теоремы косинусов найдем сторону BC треугольника ABC:

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A=$$
$$=4^2+(\sqrt{3})^2-2\cdot4\cdot\sqrt{3}\cdot\cos30°=7, \qquad BC=\sqrt{7}.$$

2) Теперь найдем площадь треугольника:

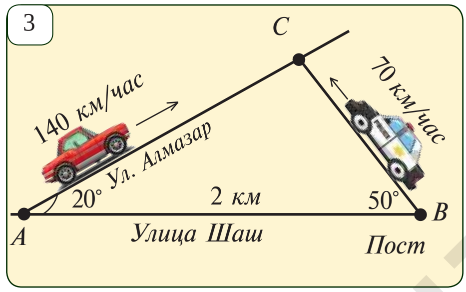
$$S=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin A=\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot4\cdot\sin30°=\sqrt{3}.$$

3) Используя полученные данные, найдем высоту AD:

Из формулы $S=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AD$, $AD=\frac{2S}{BC}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$. *Ответ:* $\frac{2\sqrt{21}}{7}$.

Задача 3. Нарушитель правил дорожного движения в 12.00 повернул в точке A на улицу Алмазар и продолжил движение со скоростью 140 *км/ч* (*рис.* 3). В 12.00 патруль из точки B направился наперерез нарушителю по грунтовой дороге.

Сумеет ли патруль остановить нарушителя на перекрестке, т.е. в точке C?



Решение: В треугольнике ABC
$\angle C=180^\circ-(\angle A+\angle B)=180^\circ-(20^\circ+50^\circ)=$
$=180^\circ-70^\circ=110^\circ$.

1. Найдем длину пути AC по улице Алмазар по теореме синусов: $\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}$

Тогда $AC=\frac{AB\cdot\sin B}{\sin C}=\frac{2\cdot\sin 50^\circ}{\sin 110^\circ}=\frac{2\cdot\sin 50^\circ}{\sin(90^\circ+20^\circ)}=\frac{2\cdot\sin 50^\circ}{\cos 20^\circ}\approx\frac{2\cdot 0{,}766}{0{,}940}=\frac{1{,}532}{0{,}94}\approx 1{,}630$ (*км*).

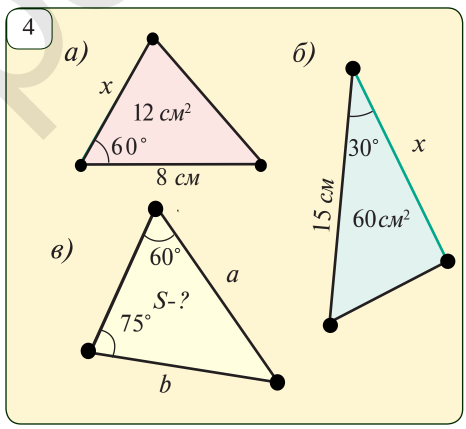
Этот путь нарушитель просдит за $\frac{1{,}630\ км}{140\ км/ч}\approx 0{,}0116$ *ч*$=0{,}012\cdot 3600$ *сек* ≈ 42 *сек*.

2. Теперь найдем отрезок BC грунтовой дороги: по теореме синусов

$$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}.\ \text{Отсюда}\ BC=\frac{AC\cdot\sin A}{\sin B}=\frac{2\cdot\sin 20^\circ}{\sin 50^\circ}=\frac{2\cdot 0{,}342}{0{,}766}\approx 0{,}893\ (км).$$

Этот путь патруль проедет за $\frac{0{,}893\ км}{70\ км/ч}\approx 0{,}0128$ *ч*$=0{,}0128\cdot 3600$ *сек* $\approx$ ≈ 46 *сек*. Значит, патруль приедет к перекрестку C позднее нарушителя.

Ответ: Нет.



Задачи и задания.

33.1. Найдите значение x по данным на *рис.* 4.

33.2. Высота CD треугольника ABC равна 4 *м*. Найдите стороны, если $\angle A=45^\circ$, $\angle B=30^\circ$.

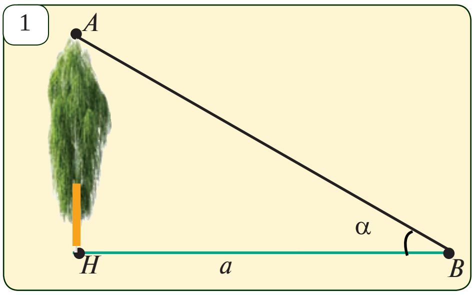
33.3. К материальной точке приложены две равные по модулю силы. Найдите модули сил, если равнодействующая этих сил равна $150H$, а угол между их направлениями равен 60°.

33.4. Длины двух сторон треугольника 7 *дм* и 11 *дм*, а медиана, опущенная на третью сторону равна 6 *дм*. Найдите эту сторону.

33.5. Найдите диагональ параллелограмма со сторонами 6 *см* и 8 *см*, если длина второй диагонали равна 12 *см*.

33.6. Угол, противолежащий стороне треугольника, длина которой 18 *см*, равен 60°. Найдите радиус описанной окружности.

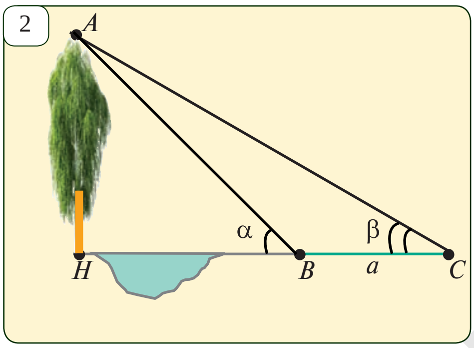
33.7. Меньшее основание равнобокой трапеции равно боковой стороне, большее основание 20 *см*. Найдите ее периметр, если один из углов трапеции равен 120°.



1. *Измерение высот.* Предположим, что необходимо измерить высоту AH какого-либо дерева (*рис.*1).

а) Для этого отметим точку B и измерим расстояние BH, равное a, и угол HBA равный α . Тогда в прямоугольном треугольнике ABH

$$AH=BH\,\mathrm{tg}\alpha=a\,\mathrm{tg}\alpha.$$



б) если основание высоты H недоступно (*рис.* 2), нам не удастся найти высоту AH так, как описано выше.Тогда выберем следующий путь:

1) отметим точки B и C, лежащие на одной прямой с точкой H ;

2) измерим расстояние BC, равное a ;

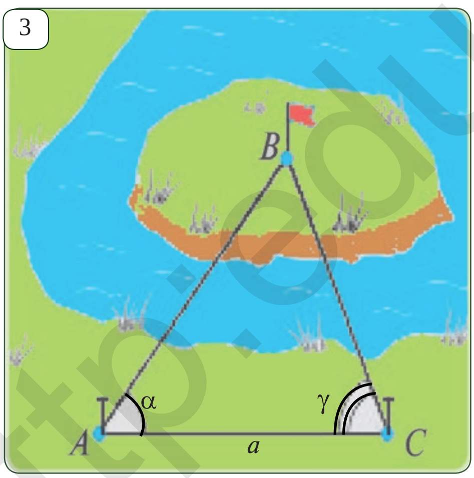
3) из треугольников ABH и ACH найдем углы $\angle ABH=\alpha$ и $\angle ACH=\beta$;

4) применив к треугольнику ABC теорему синусов ($\angle BAC=\alpha-\beta$) найдем

$$\frac{AB}{\sin\beta}=\frac{a}{\sin(\alpha-\beta)}, \text{ то есть } AB=\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

5) в прямоугольном треугольнике ABH найдем высоту AH :

$$AH=AB\sin\alpha=\frac{a\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$



2. *Вычисление расстояния до недоступной точки.* Предположим, что надо вычислить расстояние от точки A до недоступной точки B (рис.3).Напомним, что эту задачу мы решили, применяя признаки подобия. Решим теперь эту задачу, применяя теорему синусов:

1) отметим на ровном месте точку C, видимую из точек A и B .
2) измерим расстояние AC : $AC=a$.
3) измерим с помощью приборов углы ACB и BCA : $\angle BAC=\alpha$, $\angle BCA=\gamma$.
4) так как в треугольнике ABC $\angle B=180°-\alpha-\gamma$, то

$$\sin B=\sin(180°-\alpha-\gamma)=\sin(\alpha+\gamma).$$

По теореме синусов, $\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{AC}{\sin B}$ или $AB=\dfrac{a\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}$.

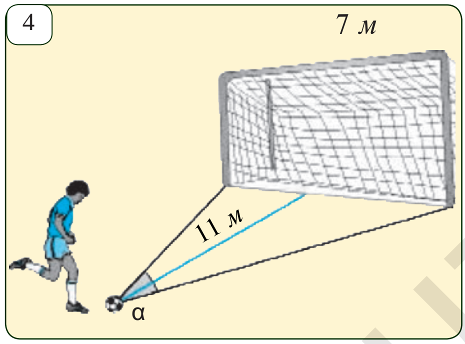
Задачи и задания.

34.1. Вычислите высоту дерева на *рис.* 1, если $a=12$ *м*, $\alpha=42°$.

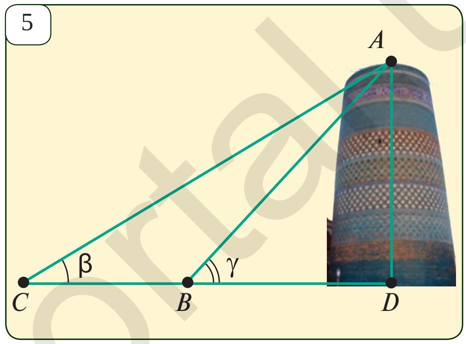
34.2. Вычислите высоту дерева на *рис.* 2, если $a=8$ *м*, $\alpha=43°$, $\beta=32°$.

34.3. Найдите на *рис.*3 расстояние AB, если $a=60$ *м*, $\alpha=62°$, $\gamma=44°$.

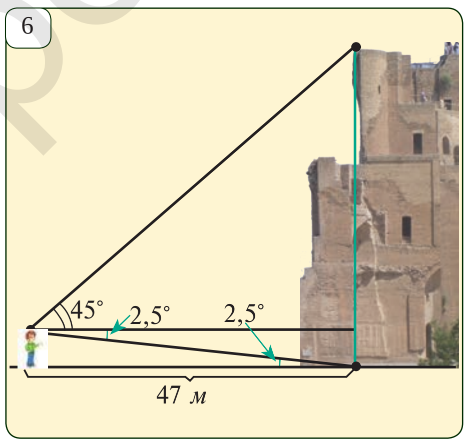
34.4. Найдите угол α, в пределах которого следует пробить 11-метровый пенальти (рис. 4). Ширина ворот 7 м.



34.5. На *рис.* 5 изображен минарет Калтаминор в городе Хива. Найдите высоту минарета, если $\beta=30{,}7°$, $\gamma=45°$, $BC=50$ *м* .



34.6. Турист рассматривает дворец Ак-Сарай в городе Шахрисабз, находясь от него на расстоянии 47 м (*рис.* 6). Найдите высоту дворца, если основание дворца видно ему под углом 2,5° по отношению к горизонту, а самая высокая его точка - под углом 45°.



34.7. Три дороги образуют треугольник ABC, в котором $\angle A=20°$, $\angle B=150°$. Водитель желает попасть из точки A в точку C как можно быстрее. Дороги AC и CB грунтовые, а AB асфальтированная дорога, по которой можно двигаться в 2 раза быстрее. Какой путь посоветуете ему выбрать?

Занимательная задача

"Новое" доказательство теоремы Пифагора

В прямоугольном треугольнике ABC (*рис.*7) $a=c\sin\alpha$, $b=c\cos\alpha$. Возведя оба равенства в квадрат и сложив, с учетом $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, получим,

$$a^2+b^2=c^2\sin^2\alpha+c^2\cos^2\alpha=c^2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=c^2.$$

Значит, $a^2+b^2=c^2$.

Обоснуйте логическую несостоятельность такого "доказательства".

ПРОВЕРЬТЕ СВОИ ЗНАНИЯ

I. Тесты

1. Какая из формул неверна для треугольника со сторонами *a, b, c,* углами α, β, γ, и площадью S ?

A) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$; B) $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$;

C) $S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$; D) $S=\frac{1}{2}ab\sin\alpha$.

2. Найдите неверную формулу:

A) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$; B) $\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$;

C) $\cos(180°-\alpha)=\cos\alpha$; D) $\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$.

3. С помощью какого утверждения можно найти углы треугольника, если известны три его стороны?

A) Теорема синусов; B) Теорема косинусов;

C) Теорема Фалеса; D) Формула Герона.

4. Один из углов треугольника равен 137°, а второй 15°. Известно, что большая сторона этого треугольника равна 22. Найдите меньшую сторону.

A) 8,3; B) 9,3; C) 3,8; D) 6,5.

5. Угол между сторонами треугольника, равными 14 и 19 равен 26°. Найдите третью сторону треугольника.

A) 1,2; B) 5,4; C) 6,9; D) 19,7.

6. Если длины двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равны $|\bar{a}|=2$, $|\bar{b}|=5$, а угол между ними равен 45°, найдите скалярное произведение этих векторов.

A) 52; B) 32 C) 102; D) 2.

7. Чему равно скалярное произведение векторов $\bar{a}(4; -1)$ и $\bar{b}(2; 3)$?

A) 5; B) 3; C) 4; D) 9.

8. Найдите угол между векторами $\bar{a}(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2})$ и $\bar{b}(\sqrt{3}; 1)$.

A) 30°; B) 60°; C) 90°; D) 45°.

9. Отношение углов треугольника равно 3:2:1. Найти отношение сторон.

A) 3:2:1; B) 1:2:3; C) $2:\sqrt{3}:1$; D) $\sqrt{3}:\sqrt{2}:1$.

10. Найдите радиус окружности, описанной около правильного треугольника со стороной 3 *см*.

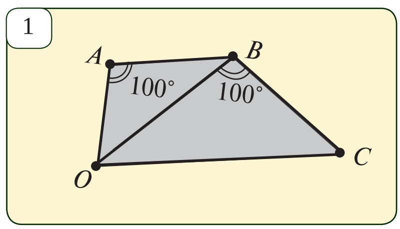
A) $\sqrt{3}$; B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) $2\sqrt{3}$; D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

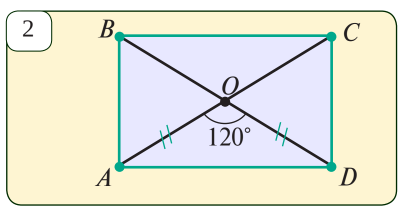
II. Задачи

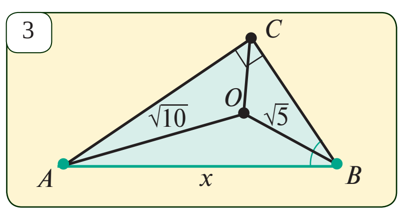
1. В треугольнике ABC сторона AB = 6 *см*, $\angle A=60°$, $\angle B=75°$. Найдите сторону BC и радиус описанной около треугольника ABC окружности.

2. Найдите косинусы углов треугольника со сторонами 5 *см*, 6 *см* и 10 *см*.

3. В треугольнике ABC $\angle B=60^\circ$, $AB=6$ *см*, $BC=4$ *см*. Найдите сторону AC и радиус окружности, описанной около треугольника ABC.
4. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 51 *см*, 52 *см* и 53 *см*.
5. Две стороны треугольника равны 14 *см* и 22 *см*, длина медианы, проведенной к третьей стороне, 12 *см*. Найдите третью сторону треугольника.
6. Диагонали параллелограмма равны 4 *см*, $4\sqrt{2}$ *см*, а угол между ними 45°. Найдите: а) площадь; б) периметр; в) высоты параллелограмма.
7. Одна из диагоналей параллелограмма со сторонами 3 и 5 равна 4. Найдите его вторую диагональ.
8. Определите вид треугольника, если его стороны равны а) 2, 2 и 2,5; б) 24, 7 и 25; в) 9, 5 и 6.
9. Стороны параллелограмма равны $7\sqrt{3}$ и 6 *см*. Найдите его площадь, если тупой угол параллелограмма равен 120°.
10. В треугольнике ABC на сторонах AB, BC отмечены точки N, K такие, что $BN=2AN$, $3BK=2KC$. Найдите отрезок NK, если $AB=3$, $BC=5$, $CA=6$.
11. В треугольнике ABC $\angle A=30^\circ$, $BC=7$ *см*. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника.
12. Пусть BE — биссектриса треугольника ABC. Из точки опущен перпендикуляр EF на сторону BC. Найдите AE, если $EF=3$, $\angle A=30^\circ$.
13. Пусть точка N — середина стороны AD прямоугольника $ABCD$. Найдите скалярное произведение $\overline{NB}\cdot\overline{NC}$, если $AB=3$, $BC=6$.
14. Пусть $\overline{a}(2;x)$, $\overline{b}(-4;1)$ и векторы, $\overline{a}+\overline{b}$ и $\overline{b}$ перпендикулярны. Найдите x.
15. Найдите угол между векторами $\overline{m}(7;3)$ и $\overline{n}(-2;-5)$.
16. Используя данные *рис.* 1, определите длину наибольшего из изображенных отрезков.
17. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O (*рис.* 2). Найдите периметр прямоугольника, если $AO=12$ *см*, $\angle AOD=120^\circ$.
18. Биссектрисы прямоугольного треугольника ABC ($\angle C=90^\circ$) пересекаются в точке O (*рис.*3). Найдите гипотенузу AB, если $OA=\sqrt{10}$, $OB=\sqrt{5}$.







III. Проверьте себя (образец контрольной работы)

1. Найдите наибольший угол треугольника со сторонами $a=45$, $b=70$, $c=95$.
2. Решите треугольник, если $b=5$, $\alpha=30°$, $\beta=50°$.
3. В треугольнике PKH стороны $PK=6$, $KH=5$, $\angle PKH=100°$. Найдите длину медианы HF и площадь треугольника PFH.
4. *(Дополнительно)*. Пусть в треугольнике $a=\sqrt{3}$, $b=1$, $\alpha=135°$. Найти угол β.

Исторические этюды. О синусе

Косвенные сведения о синусе угла впервые встречаются в трудах индийских астрономов IV-V вв.

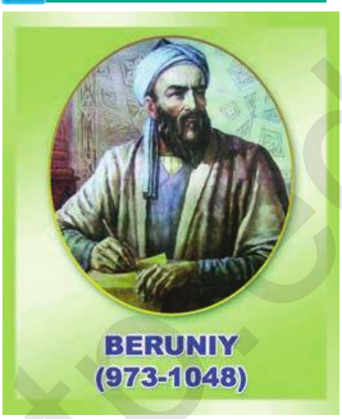
Средеазиатские ученые ал-Хорезми, Беруни, Ибн Сина, Абдурахман ал-Хазини (XII в.) использовали для синуса термин "*ал джайб*" .

Современное обозначение синуса использовали Симпсон, Эйлер, Даламбер, Лагранж и др. (XVII в.).

Термин "*cosinus*" - сокращение латинского термина "complementi sinus", что в переводе означает «синус дополнения», точнее «синус дополнительной дуги».

Теорему косинусов знали еще древние греки, ее доказательство приведено в "Началах" Евклида. Своеобразное доказательство теоремы синусов изложил Абу Райхан Беруни.

Исторические этюды. Беруни (полное имя Беруни - Абу Райхан Мухаммед ибн Ахмад) (973-1048) − великий ученый-энциклопедист. Он родился в г.Кят, древней столице Хорезма. Кят был расположен на правом берегу Амударьи и до недавнего времени назывался Шаббоз, ныне Беруни. О вкладе Беруни в математику и другие науки можно судить по написанным им более чем 150 произведений. Самые значительные из них- "Индия", "Памятники минувших поколений", "Канон Масъуда", "Геодезия", "Минералогия" и "Книга вразумления начаткам науки о звездах". Главное сочинение Беруни "Канон Масъуда" посвящено, в основном, астрономии, но содержит достаточно много принадлежащих ему результатов и в математике.



В этом труде Беруни доказал теоремы о синусе суммы и разности углов, о синусе двойного и половинного углов и равносильные им теоремы о хордах, вычислил хорду угла в 2°, составил таблицы синусов и тангенсов, привел своеобразное доказательство теоремы синусов.

Глава III

ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ И ПЛОЩАДЬ КРУГА

В результате изучения этой главы вы приобретете следующие знания и практические навыки:

Знания:

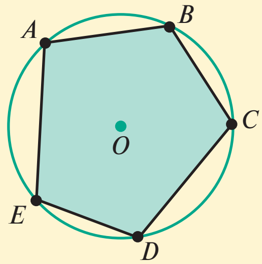
√ *Знать свойства описанной около многоугольника и вписанной в многоугольник окружности;*
√ *Знать свойства правильных многоугольников;*
√ *Знать формулы для вычисления площади правильных многоугольников;*
√ *Знать формулы для вычисления длины окружности и ее дуг;*
√ *Знать формулы для вычисления площади круга и его частей;*
√ *Знать радианную меру угла.*

Практические навыки:

√ *изображать правильные многоугольники;*
√ *находить радиусы вписанных и описанных многоугольников;*
√ *вычислять длины окружностей и их дуг;*
√ *вычислять площади круга и его частей.*

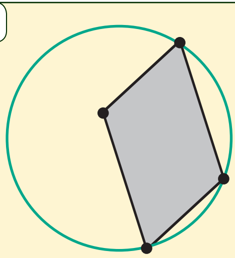
36 ВПИСАННЫЙ МНОГОУГОЛЬНИК

1

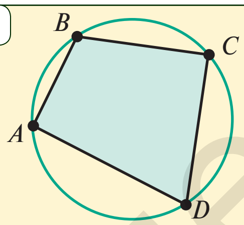


Пятиугольник вписанный в окружность или окружность, описанная около пятиугольника.

2

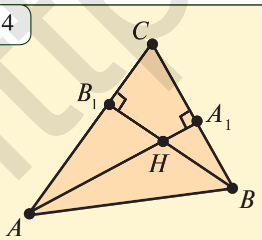


3



$\angle A+\angle C=180^\circ$
$\angle B+\angle D=180^\circ$

4



Определение. Если все вершины многоугольника лежат на окружности, то говорят, что этот многоугольник *вписан в окружность*, а окружность *описана около него* (рис. 1).

О возможности описать около любого треугольника окружность и о том, что ее центр лежит в точке пересечения серединных перпендикуляров ее сторон, вы узнали в 8 классе.

Если число сторон многоугольника больше трех, то около такого многоугольника не всегда можно описать окружность. Например, для любого параллелограмма, кроме прямоугольника, описанная окружность не существует (рис. 2).

Из 8 класса вам известно, что окружность можно описать около четырехугольника тогда и только тогда, когда сумма противоположных углов четырехугольника равна 180° (рис. 3).

Задача 1. Высоты AA_1 и BB_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Докажите, что четырехугольник A_1HB_1C можно вписать в окружность.

Решение. Так как $AA_1 \perp BC$ и $BB_1 \perp AC$ *(рис. 4), то*

$$\angle HB_1C=\angle HA_1C=90^\circ.$$

Тогда $\angle HB_1C+\angle HA_1C=180^\circ$. Так как сумма внутренних углов четырехугольника равна 360°, то:

$$\angle B_1CA_1+\angle B_1HA_1=180^\circ.$$

Следовательно, около четырехугольника A_1HB_1C можно описать окружность.

Так как вершины многоугольника, вписанного в окружность, находятся на равных расстояниях от центра окружности, то центр окружности находится в точке пересечения серединных перпендикуляров его сторон (рис. 5). Следовательно, серединные перпендикуляры сторон многоугольника, вписанного в окружность, должны пересекаться в одной точке.

Задача 2. В окружность с радиусом 10 см вписан равнобедренный остроугольный треугольник с высотой 16 см. Найдите стороны треугольника.

Решение. Центр описанной окружности O лежит на серединном перпендикуляре к стороне AC, т.е. на высоте BD (*рис.* 6). Тогда,

$$OD = BD - OB = 16 - 10 = 6\ (см)$$

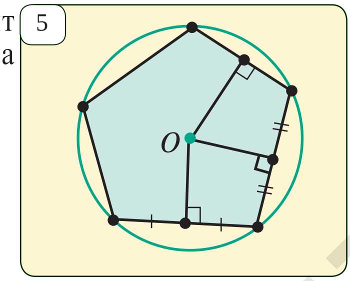
и по теореме Пифагора,

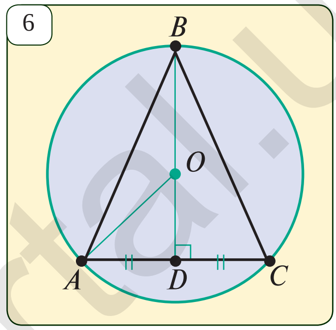
$$AD = \sqrt{OA^2 - OD^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8\ (см),\ AC = 2AD = 16 (см).$$

Итак, в прямоугольном треугольнике ABD

$$AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{8^2 + 16^2} = 8\sqrt{5}\ (см).$$

Ответ: $8\sqrt{5}$ *см*, $8\sqrt{5}$ *см*, 16 *см*.





Задачи и задания

36.1. Докажите, что если многоугольник вписан в окружность, то серединные перпендикуляры его сторон пересекаются в одной точке.

36.2. Какие треугольники могут быть вписаны в окружность? А какие четырехугольники?

36.3. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Докажите, что $\angle ACB = \angle AEB$.

36.4. Прямоугольный треугольник с катетами 16 *см* и 12 *см* вписан в окружность. Найдите ее радиус.

36.5. В окружность с радиусом 25 *см* вписан прямоугольник, одна сторона которого равна 14 *см*. Найдите площадь прямоугольника.

36.6. В окружность с радиусом 10 *см* вписаны: а) равносторонний треугольник; б) квадрат; в) равнобедренный прямоугольный треугольник. Найдите их стороны.

36.7. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 16 *см*, 10 *см* и 10 *см*.

36.8. В шестиугольнике $ABCDEF$, вписанном в окружность, $\angle BAF + \angle AFB = 90°$ Докажите, что центр окружности лежит на стороне AF.

36.9. Докажите, что любая равнобокая трапеция может быть вписана в окружность.

36.10. Начертите равнобокую трапецию. Постройте описанную около неё окружность.

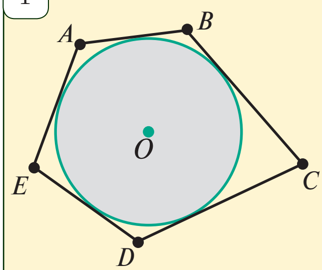
Занимательная задача

Французский математик Эварист Галуа (1811 —1832) в шестнадцатилетнем возрасте учился в колледже. Однажды преподаватель предложил ему решить в течение часа три задачи. Галуа решил эти непростые задачи в течение 15 минут, чем поразил своих однокурсников. Вот одна из этих задач. Попробуйте-ка ее решить!

Задача. Стороны четырехугольника, вписанного в окружность, равны a, b, c и d. Найдите его диагонали.

37 ОПИСАННЫЙ МНОГОУГОЛЬНИК

1



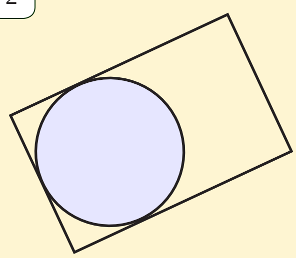
Пятиугольник, описанная около окружности или окружность, вписанная в пятиугольник.

Определение. Если все стороны многоугольника касаются окружности, то говорят, что многоугольник *описан около* окружности, а окружность *вписана в* многоугольник (*рис.* 1).

О возможности вписать в любой треугольник окружность и о том, что ее центр лежит в точке пересечения биссектрис углов треугольника, вы узнали в 8 классе.

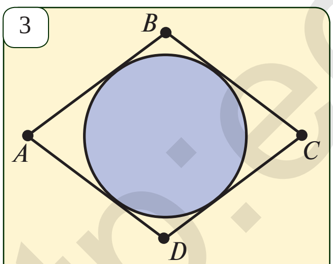
Если число углов многоугольника больше трех, то в такой многоугольник не всегда можно вписать окружность. Например, кроме квадрата, ни в один прямоугольник окружность вписать нельзя (*рис.* 2).

2



Кроме того, из геометрии 8 класса вы знаете, что в четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных сторон равны (*рис.* 3).

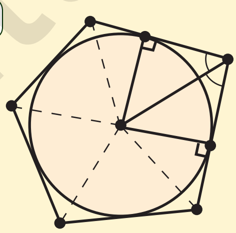
3



AB + CD = AD + BC

Так как стороны описанного многоугольника касаются окружности, то центр окружности лежит на биссектрисах углов этого многоугольника (*рис.*4). Значит, биссектрисы углов описанного многоугольника пересекаются в одной точке.

4



***Теорема.* Пусть многоугольник, описанный около окружности радиуса r, имеет площадь *S* и полупериметр *p*. Тогда *S*=*pr*.**

Доказательство. Приведем доказательство теоремы для вписанного шестиугольника *ABCDEF*. Соединив центр O окружности с вершинами многоугольника, получим разбиение многоугольника на треугольники. Высоты этих треугольников равны r (*рис.*5). Тогда

$$S=S_{AOB}+S_{BOC}+\ldots+S_{FOA}=$$
$$=\frac{1}{2}AB\cdot r+\frac{1}{2}BC\cdot r+\ldots+\frac{1}{2}FA\cdot r=$$
$$=\frac{AB+BC+\ldots+FA}{2}\cdot r=pr.$$

Теорема доказана.

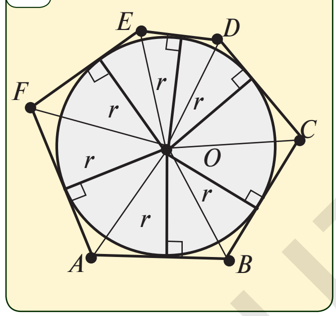
Задача. Площадь четырехугольника, описанного около окружности, равна 21 *см*², а его периметр равен 7 *см*. Найдите радиус окружности.

Решение. Согласно формуле $S = pr$,

$$r = \frac{S}{p} = \frac{21}{3,5} = 6 \ (см).$$

Ответ: 6 *см*.

5



Задачи и задания

37.1. Найдите радиус окружности, вписанной: а) в равносторонний треугольник; б) в квадрат со стороной 6 *см*.

37.2. Площадь многоугольника, описанного около окружности с радиусом 5 *см* равна 18 *см*². Найдите периметр многоугольника.

37.3. Найдите периметры многоугольников, изображенных на *рис.* 6.

37.4. По данным на *рис.* 7 найдите искомый отрезок.

37.5. Докажите, что параллелограмм, описанный около окружности, есть ромб.

37.6. Докажите, что радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен половине разности между суммой катетов и гипотенузой.

37.7. Докажите, что средняя линия равнобокой трапеции, описанной около окружности, равна ее боковой стороне.

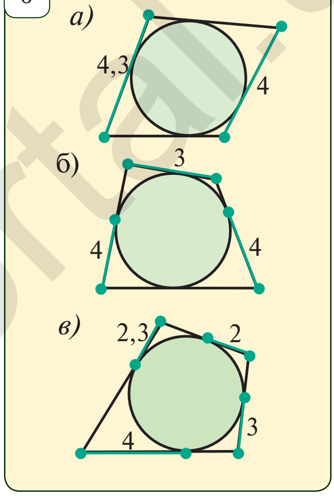
37.8. Равнобокая трапеция с основаниями 9 *см* и 16 *см* описана около окружности. Найдите радиус окружности.

37.9*. Четырехугольник *ABCD* описан около окружности с центром *O*. Докажите, что сумма площадей треугольников *AOB* и *COD* равна половине площади четырехугольника.

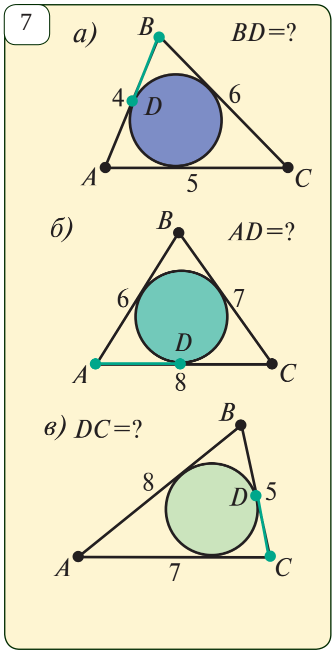
37.10*. Докажите, что высота описанной около окружности равнобокой трапеции с основаниями *a* и *b*, равна $\frac{\sqrt{ab}}{2}$.

37.11*. Докажите, что около четырехугольника *EFPQ* с вершинами в точках пересечения биссектрис внутренних углов произвольного четырехугольника *ABCD* можно описать окружность.

6



7



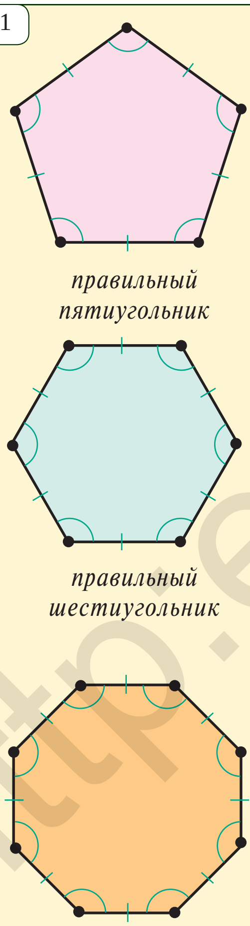
ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

Активизирующее упражнение

1. Какие фигуры называются многоугольниками?
2. Что называется углом многоугольника, смежными сторонами, диагоналями?
3. Какой многоугольник называется выпуклым?
4. Сформулируйте теорему о сумме внутренних углов выпуклого многоугольника.

Определение. Выпуклый многоугольник, все стороны и все углы которого равны, называется *правильным многоугольником*.

Равносторонний треугольник, квадрат - примеры правильных многоугольников. На рис. 1 изображены правильные пятиугольник, шестиугольник и восьмиугольник.



1

правильный пятиугольник

правильный шестиугольник

правильный восьмиугольник

Теорема. ***Каждый угол правильного n-угольника равен*** $\frac{n-2}{n}\cdot 180^\circ$.

Доказательство. Сумма внутренних углов правильного n-угольника равна $(n-2).180°$. Значит, каждый его угол равен $\frac{n-2}{n}\cdot 180°$. *Теорема доказана.*

Задача. Покажите, что в правильном пятиугольнике $A_1A_2A_3A_4A_5$ диагонали A_1A_3 и A_1A_4 равны (*рис.* 2).

$A_1A_2A_3A_4A_5$ — правильный пятиугольник ⇒ $A_1A_3 = A_1A_4$

Решение. По признаку *СУС* равенства треугольников, треугольники $A_1A_2A_3$ и $A_1A_5A_4$ равны. Действительно, из равенств сторон и углов правильных многоугольников,

$$A_1A_2 = A_1A_5,\ A_2A_3 = A_5A_4 \text{ и } \angle A_1A_2A_3 = \angle A_1A_5A_4.$$

Значит, $\Delta A_1A_2A_3 = \Delta A_1A_5A_4$. Откуда следует, что

$$A_1A_3 = A_1A_4.$$

Следствие. Все диагонали правильного пятиугольника равны.

Задачи и задания

38.1. Приведите примеры неправильных многоугольников и объясните, почему они не являются правильными.

38.2. Среди следующих высказываний найдите верные:

а) треугольник, все стороны которого равны, является правильным;

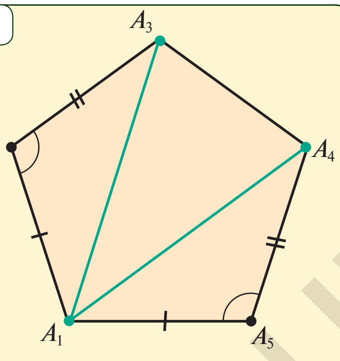
б) четырехугольник, все стороны которого равны, является правильным;

в) многоугольник, все углы которого равны, является правильным;

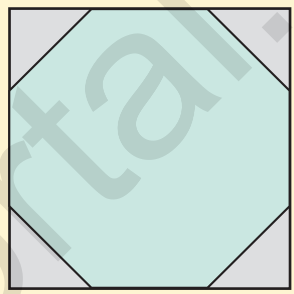
г) ромб, все углы которого равны, является правильным четырехугольником;

д) прямоугольник, все стороны которого равны, является правильным четырехугольником.

2



3



38.3. Найдите угол правильного n-угольника, если: а) $n=3$; б) $n=5$; в) $n=6$; г) $n=10$; д) $n=18$.

38.4. Чему равен внешний угол правильного n-угольника? Найдите внешний угол правильного n-угольника, если: а) $n=3$; б) $n=5$; в) $n=6$; г) $n=10$; д) $n=12$.

38.5. Докажите, что сумма внешних углов n-угольника, взятых по одному при каждой вершине, равна $360°$.

38.6. Найдите число сторон правильного многоугольника, если каждый его угол равен: а) $60°$; б) $90°$; в) $135°$; г) $150°$.

38.7. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$.
Докажите: а) равенство диагоналей AC и BD;
б) правильность треугольника ACE;
в) равенство диагоналей AD, BE и CF.

38.8. Найдите меньшую диагональ правильного многоугольника, сторона которого равна 10 *см*, если многоугольник: а) пятиугольник; б) шестиугольник; г) восьмиугольник; д) двенадцатиугольник; е) восемнадцатиугольник.

38.9. Докажите, что правильный четырехугольник - это квадрат и только он.

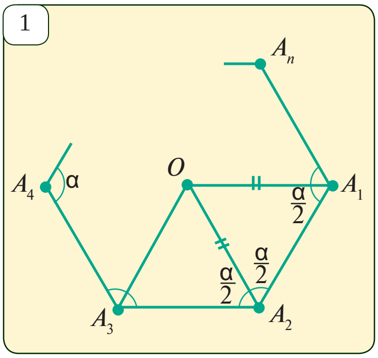
38.10*. Сторона квадрата равна a. На его сторонах от каждой вершины отложены отрезки, равные половине диагонали. В результате получился восьмиугольник (*рис.* 3). Определите его вид и найдите площадь.

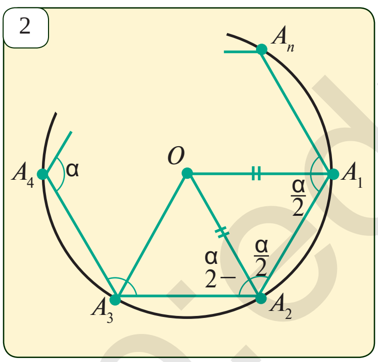
39 ВПИСАННЫЕ В ПРАВИЛЬНЫЙ МНОГОУГОЛЬНИК И ОПИСАННЫЕ ОКОЛО НЕГО ОКРУЖНОСТИ

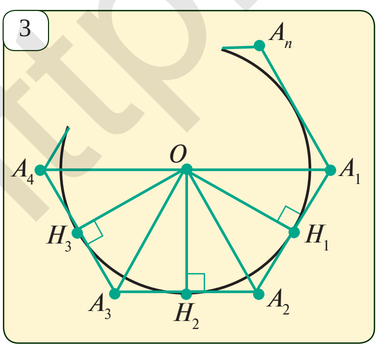
Активизирующее упражнение

1. Какой многоугольник называется вписанным в окружность?
2. Какой многоугольник называется описанным около окружности?
3. Можно ли произвольный правильный многоугольник вписать в окружность и описать около окружности? Приведите примеры?

Теорема. Около каждого правильного многоугольника можно описать окружность и в каждый правильный многоугольник можно вписать окружность.







Доказательство. Предположим, что $A_1A_2 \ldots A_n$ — правильный многоугольник, O — точка пересечения биссектрис углов A_1 и A_2. Обозначим угол этого правильного многоугольника через

1. Докажем, что $OA_1 = OA_2 = \ldots = OA_n$ (*рис.* 1). По определению биссектрисы,

$$\angle OA_1A_2 = \angle OA_2A_1 = \frac{\alpha}{2}.$$

Значит, A_1OA_2 — равнобедренный треугольник, т.е. $OA_1 = OA_2$. Треугольники ΔA_1A_2O и ΔA_3A_2O равны по признаку *СУС* равенства треугольников, так как $A_1A_2 = A_3A_2$, A_2O — общая и

$$\angle OA_1A_2 = \angle OA_2A_1 = \frac{\alpha}{2}.$$

Поэтому $OA_3 = OA_1$. Аналогично можно показать, что верны равенства $OA_4 = OA_2$, $OA_5 = OA_3$, и т.д.

Таким образом, $OA_1 = OA_2 = \ldots = OA_n$, т.е. окружность с центром O и радиусом OA_1 будет описанной около многоугольника (*рис.* 2).

2. Как было показано выше, равнобедренные треугольники A_1OA_2, A_2OA_3, … A_nOA_1 равны. Поэтому высоты, опущенные из вершины O также равны (*рис.* 3):

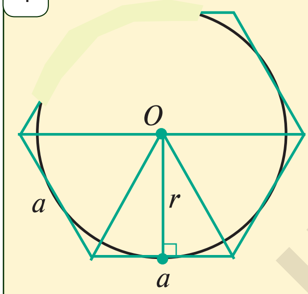
$$OH_1 = OH_2 = \ldots = OH_n.$$

Итак, окружность с центром O и радиусом, равным OH_1 касается каждой стороны многоугольника. Значит, эта окружность является вписанной в многоугольник. *Теорема доказана.*

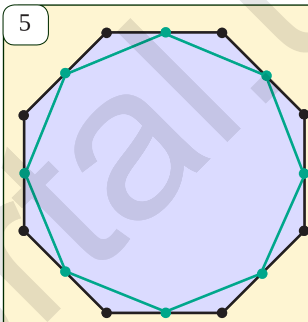
Следствие. **Центры вписанной в правильный многоугольник и описанной около него окружностей находятся в одной точке.**

Эта точка называется *центром* многоугольника. Углы с вершинами в центре многоугольника, образованные лучами, соединяющими центр многоугольника с его соседними вершинами (углы A_1OA_2, A_2OA_3 … на рис. 1) называются его *центральными углами*. Высоты, опущенные из центра многоугольника на его стороны (отрезки OH_1, OH_2, … на рис. 3) называются его *апофемой*.

4



5



Задача. Докажите, что если сторона правильного n -угольника равна a, радиус вписанной окружности r, то площадь S многоугольника можно вычислить по формуле $S=\frac{1}{2}nar$. (*рис.* 4)

Решение. Так как полупериметр многоугольника $p=\frac{1}{2}na$, то из формулы $S=pr$ следует формула $S=\frac{1}{2}nar$.

Задачи и задания

39.1. Найдите радиусы вписанной в квадрат и описанной около него окружностей, если площадь квадрата равна 36 $см^2$.

39.2. Найдите радиусы вписанной в правильный треугольник и описанной около неё окружностей, если периметр треугольника равен 18 *см*.

39.3. Докажите, что радиус описанной около правильного шестиугольника окружности равен его стороне.

39.4. Докажите, что середины сторон правильного многоугольника будут, в свою очередь, вершинами другого правильного многоугольника (*рис.* 5).

39.5. Докажите, что радиус вписанной в правильный треугольник окружности в два раза меньше радиуса окружности, описанной около него.

39.6*. Докажите, что серединные перпендикуляры двух произвольно выбранных сторон правильного многоугольника пересекаются в одной точке или лежат на одной прямой.

39.7. Сторона вписанного в окружность правильного многоугольника стягивает дугу а) 60°; б) 30°; в) 36°; г) 18°; д) 72°. Найдите число сторон.

39.8. Из бумаги вырежьте шесть равных правильных треугольников. Из них составьте правильный шестиугольник. Найдите отношение площадей шестиугольника и треугольника.

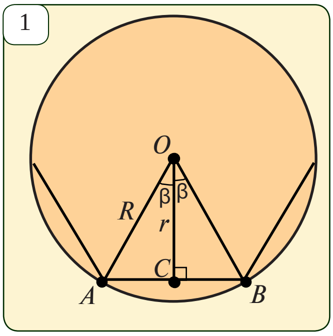
40 СВЯЗЬ МЕЖДУ РАДИУСАМИ ВПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТИ В ПРАВИЛЬНЫЙ МНОГОУГОЛЬНИК И ОПИСАННОЙ ОКОЛО НЕГО ОКРУЖНОСТИ

Активизирующее упражнение

Что называется: а) синусом; б) косинусом; в) тангенсом острого угла прямоугольного треугольника?

Найдем формулы для нахождения радиуса R окружности, описанной около правильного n-угольника со стороной a_n и радиуса r окружности, вписанной в него. Рассмотрим для этого прямоугольный треугольник ACO. Здесь O — центр многоугольника, C - середина стороны AB (*рис.* 1).

1



Имеем,

$$\beta=\angle AOC=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\cdot\frac{360^\circ}{n}=\frac{180^\circ}{n};$$

$$R=OA=\frac{AC}{\sin\beta}=\frac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}};\qquad r=OC=\frac{AC}{tg\beta}=\frac{a_n}{2tg\frac{180^\circ}{n}};$$

$$r=OC=OA\cdot\cos\beta=R\cos\frac{180^\circ}{n}.$$

С помощью этих формул найдем связь между сторонами некоторых правильных многоугольников и радиусами описанной и вписанной окружностей.

1. Для правильного треугольника (n=3):

$$\beta=\frac{180^\circ}{3}=60^\circ;\quad R=\frac{a_3}{2\sin 60^\circ}=\frac{a_3}{\sqrt{3}};\quad r=\frac{a_3}{2tg\,60^\circ}=\frac{a_3}{2\sqrt{3}};\quad R=2r.$$

2. Для квадрата (n=4):

$$\beta=\frac{180^\circ}{4}=45^\circ;\quad R=\frac{a_4}{2\sin 45^\circ}=\frac{a_4}{\sqrt{2}};\quad r=\frac{a_4}{2tg\,45^\circ}=\frac{a_4}{2};\quad R=r\sqrt{2}.$$

3. Для правильного шестиугольника (n=6):

$$\beta=\frac{180^\circ}{6}=30^\circ;\quad R=\frac{a_6}{2\sin 30^\circ}=a_6;\quad r=\frac{a_6}{2tg\,30^\circ}=\frac{a_6\sqrt{3}}{2};\quad R=\frac{2r}{\sqrt{3}}.$$

Задача. Выразите сторону правильного n-угольника через радиус R описанной около многоугольника окружности и радиус r вписанной.

Решение.

Из формул $R=\dfrac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$ и $r=\dfrac{a_n}{2tg\frac{180^\circ}{n}}$ получим, что $a_n=2R\sin\frac{180^\circ}{n}$ и $a_n=2r\,tg\frac{180^\circ}{n}$.

Вчастности, при $n=3$ $a_3=R\sqrt{3}=2r\sqrt{3}$.

Задачи и задания

40.1. Вычислите радиусы вписанной и описанной окружностей для: а) правильного треугольника; б) правильного четырехугольника; в) правильного шестиугольника, имеющих сторону 15 *см*.

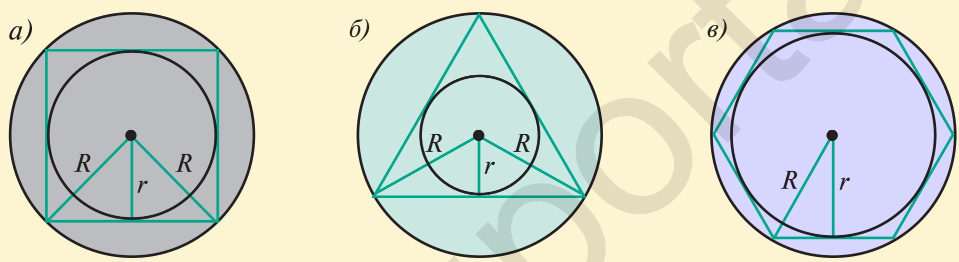
40.2. На рис. 2 изображены вписанные в окружность радиуса R квадрат, правильный треугольник и правильный шестиугольник. Перепишите в тетрадь данные таблицы и заполните пустые клетки (a_n — сторона n-угольника, P — его периметр, S — площадь, r — радиус вписанной окружности).

40.3. Найдите исходящие из одной вершины диагонали правильного двенадцатиугольника, вписанного в окружность с радиусом 8 *см*.

40.4. Периметр вписанного в окружность правильного треугольника 24 *см*. Найдите сторону вписанного в эту окружность квадрата.

40.5. Из куска дерева в форме цилиндра нужно изготовить столбик в форме призмы, в основании которой лежит: а) квадрат; б) правильный шестиугольник со стороной 20 *см*. Каким должен быть диаметр поперечного сечения деревянного цилиндра?

2



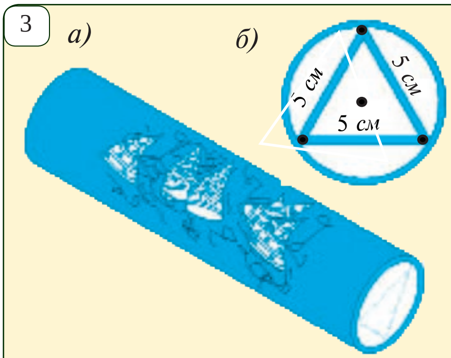
	R	r	a_4	P	S
1.			6		
2.		2			
3.	4				
4.				28	
5.					16

	R	r	a_3	P	S
1.	3				
2.					10
3.		2			
4.			5		
5.				6	

	R	r	a_6	P	S
1.	4				
2.		5			
3.			6		
4.				42	
5.					$24\sqrt{3}$

40.6. Вероятно, вам знакома игрушка "Калейдоскоп", предназначенная для созерцания различных узоров (*рис.* 3.*а*). Она состоит из трубки и трех стеклышек. На *рис.* 3.*б* вы видите ее поперечное сечение и размеры стеклышек. Найдите радиус поперечного сечения.

3



ПРОВЕРЬТЕ СВОИ ЗНАНИЯ

I. Тесты

1. В какой из указанных ниже многоугольников невозможно вписать окружность?
A) Треугольник; B) Квадрат, отличный от ромба;
C) Квадрат; D) Прямоугольник, отличный от ромба.

2. Около какого из указанных ниже многоугольников невозможно описать окружность?
A) Треугольник; B) Ромб, отличный от квадрата;
C) Квадрат; D) Прямоугольник, отличный от ромба.

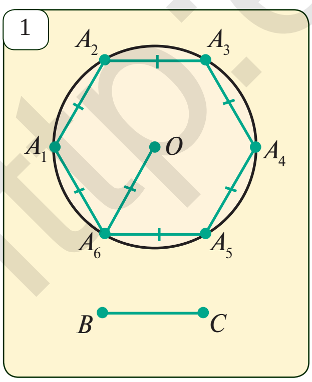
3. Пусть прямоугольник $ABCD$ вписан в некоторую окружность. Укажите неверное утверждение.
A) $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°$; C) $AB+CD=BC+AD$;
B) $\angle A+\angle C=180°$; D) $\angle B+\angle D=180°$.

4. Пусть прямоугольник $ABCD$ описан около некоторой окружности. Укажите неверное утверждение.
A) $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°$; C) $AB+CD=BC+AD$;
B) $\angle A+\angle C=180°$; D) $AB-BC=AD-CD$.

5. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника со сторонами 5 *см* и 12 *см*.
A) 6 *см*; B) 6,5 *см*; C) 7 *см*; D) 7,5 *см*.

6. Найдите внутренний угол правильного 24-угольника.
A) 120°; B) 135°; C) 150°; D) 165°.

7. Найдите сумму внутренних углов правильного многоугольника, если каждый внешний угол равен 60°.
A) 540°; B) 360°; C) 90°; D) 720°.



II. Задачи на построение.

1. Постройте правильный шестиугольник со стороной, равной заданному отрезку. При построении воспользуйтесь тем, что радиус описанной окружности равен стороне, а также рис.1.

2. Постройте вписанный а) правильный треугольник, б) квадрат, в) правильный восьмиугольник, используя данные рис.2-4.

3. Постройте описанный правильный шестиугольник, используя данные рис.5. (Стороны правильного шестиугольника, описанного около окружности на рис.5 лежат на касательных, проведенных из вершин вписанного шестиугольника).

III. Задачи на вычисление.

1. Правильный треугольник, квадрат и правильный шестиугольник имеют одинаковые стороны. Найдите отношение их площадей.

2. Найдите отношение площади вписанного в окружность шестиугольника к площади описанного около этой окружности шестиугольника.

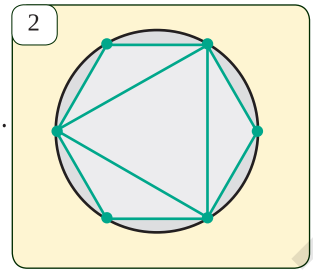
3. Расстояние между параллельными сторонами правильных: а) шестиугольника; б) восьмиугольника; в) двенадцатиугольника равно 10 *см*. Найдите сторону многоугольника.

4. Правильный восьмиугольник $A_1A_2 \ldots A_8$ вписан в окружность радиуса R. Докажите, что четырехугольник $A_3A_4A_7A_8$ - прямоугольник и найдите его площадь.

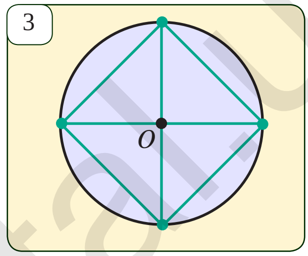
5. Гипотенуза описанного около окружности прямоугольного треугольника делится точкой касания на отрезки длинами 4 *см* и 6 *см*. Найдите площадь треугольника.

6. Найдите угол между наибольшей и наименьшей диагоналями, проведенными из одной вершины правильного десятиугольника.

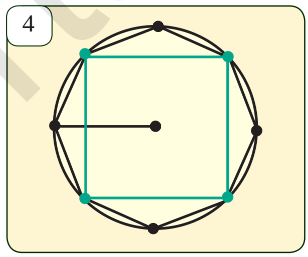
2



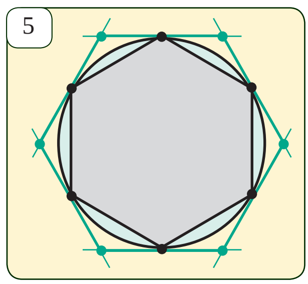
3



4



5



IV. Проверьте себя (образец контрольной работы).

1. Катеты прямоугольного треугольника равны 10 *см* и 24 *см*. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей.

2. Один из углов описанного около окружности радиуса 5 *см*, равен 150°. Найдите: а) периметр; б) диагонали; в) площадь ромба.

3. Найдите диагонали, проведенные из одной вершины правильного шестиугольника со стороной 4 *см*.

4. *(Дополнительно)*. Найдите разность площадей правильного шестиугольника и правильного треугольника, вписанных в окружность радиуса 3 *см*.

Исторические этюды. Произвольный правильный многоугольник нельзя построить с помощью циркуля и линейки. Это установил алгебраическим методом в 1801 г. немецкий математик Карл Фридрих Гаусс (1777-1855). Он доказал, что правильный n-угольник может быть построен с помощью циркуля и линейки тогда и только тогда, когда в разложении n на простые множители $2^m p_1 p_2 \ldots p_n$, простые числа $p_1, p_2, \ldots p_n$ имеют вид $2^{2^k}+1$. Здесь m и k − неотрицательные целые числа.

ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ

1

а) б)

Активизирующее упражнен...

1. Обычно сечение трубы представляет собой окружность. Прижав пальцем один конец тонкой нити, намотайте ее один раз на трубу. Длина одного витка нити будет длиной окружности, образующего поперечное сечение трубы. Измерьте его длину с помощью линейки как показано на рис.1.
2. С помощью нити измерьте диаметр поперечного сечения.
3. Найдите отношение измеренной длины окружности к ее диаметру.
4. Выполнив подобные измерения с несколькими различными, круглыми в сечении предметами, вычислите отношение длины окружности к ее диаметру.
5. Можно ли в результате этого упражнения сделать заключение об отношении длины любой окружности к ее диаметру?

Теорема.* *Отношение длины окружности к ее диаметру не зависит от радиуса окружности, т. е. для каждой окружности это отношение остается одним и тем же.

Доказательство. Рассмотрим две окружности, R_1 и R_2 - их радиусы, а C_1 и C_2 - длины окружностей. Требуется доказать, что $\frac{C_1}{2R_1}=\frac{C_2}{2R_2}$. Впишем в каждую окружность правильные n-угольники. Обозначим их периметры P_1 и P_2 соответственно. Тогда из

$P_1 = n\cdot 2R_1\sin\frac{180^\circ}{n}$, $P_2 = n\cdot 2R_2\sin\frac{180^\circ}{n}$ следует $\frac{P_1}{P_2}=\frac{2R_1}{2R_2}$ (*).

Это равенство верно при любом n, причем с возрастанием n периметр P_1 вписанного n-угольника будет приближаться к C_1, а периметр P_2 — приближаться к C_2.

Поэтому отношение $\frac{P_1}{P_2}$ становится равным $\frac{C_1}{C_2}$ (полное доказательство этого утверждения приводится на более высоком уровне изучения математики). Таким образом, из равенства (*) следует, что $\frac{C_1}{C_2}=\frac{2R_1}{2R_2}$ откуда получаем равенство $\frac{C_1}{2R_1}=\frac{C_2}{2R_2}$.

Теорема доказана.

Отношение длины окружности к ее диаметру обозначается греческой буквой π *(читается "пи")*. Это обозначение ввел в науку великий математик Л. Эйлер (1707—1783). На греческий язык окружность переводится словом "periphereia", которое начинается с этой буквы. π − иррациональное число, на практике используется его приближенное значение: 3,14 (или, более точно 3,1416).

Итак, $\frac{C}{2R} = \pi$. Из этого равенства получаем формулу для длины окружности радиуса R: $C = 2\pi R$.

Задача. Найдите длину окружности, описанной около правильного треугольника со стороной 6 *см*.

Решение. Согласно формуле $R = \frac{a_3}{\sqrt{3}}$ для радиуса описанной около правильного треугольника окружности, находим $R = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ (*см*). Тогда по формуле для длины окружности

$C = 2\pi R = 2\pi \cdot 2\sqrt{3} = 4\pi\sqrt{3}$ (*см*). *Ответ:* $4\pi\sqrt{3}$ *см*.

Задачи и задания

42.1. Какое число обозначается буквой π? Заполните таблицу, вычисляя длину окружности C и радиус R. (примите значение $\pi \approx 3{,}14$).

C			82	18π		6,28	
R	4	3			0,7		101,5

42.2. На сколько изменится длина окружности, если ее радиус: а) увеличится в 3 раза; б) увеличится на 3 *см*; в) уменьшится в 3 раза; г) уменьшится на 3 *см*?

42.3. Чему равен радиус земного шара, если одна сорокамиллионная часть экватора составляет 1 *м*?

42.4. Найдите длину окружности, описанной около:
а) правильного треугольника со стороной a;
б) прямоугольного треугольника с катетами a и b;
в) равнобокой трапеции с основанием a и боковой стороной b.

2

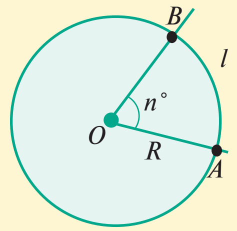
42.5. Найдите длину окружности, вписанной: а) в квадрат со стороной a; б) в равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой c; в) в прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α.

42.6. Тепловоз прошел путь 1413 *м*. На этом пути одно из его колес совершило 300 оборотов. Найдите диаметр колеса тепловоза.

42.7. Радиус колеса автомобиля равен 24 *см*. Сколько полных оборотов совершит колесо на пути 100 *км* (*рис.*2)?

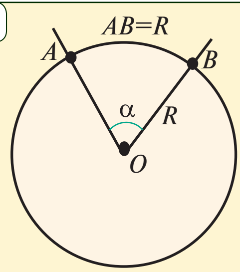
43 ДЛИНА ДУГИ ОКРУЖНОСТИ. РАДИАННАЯ МЕРА УГЛА

1



$l = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot n^\circ$

2



$\alpha = 1$ *радиан* $\approx 57^\circ 17' 45''$

1. *Длина дуги, на которую опирается центральный угол, равный n°.*

Предположим, что дана дуга окружности радиуса R, на которую опирается центральный угол AOB, градусная мера которого равна n° (*рис.* 1).

Так как длина окружности радиуса R, т. е. дуги в 360°, равна $2\pi R$,

то длина дуги в 1° равна $\frac{2\pi R}{360^\circ} = \frac{\pi R}{180^\circ}$.

Тогда длина дуги n° (*рис.* 1) определяется формулой $l = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot n^\circ$.

2. *Радианная мера угла.*

Наряду с градусной мерой угла используется также его радианная мера.

Отношение длины дуги окружности к ее радиусу находим из приведенной выше формулы: $\frac{l}{R} = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot n^\circ$.

Значит, отношение длины дуги, соответствующей центральному углу, к радиусу определяется только величиной центрального угла. Пользуясь этим, в качестве радианной меры угла принимается в точности это отношение:

$$\alpha = \frac{l}{R} = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot n^\circ.$$

Слово радиан обычно не пишется. Например, вместо 5 радиан пишут просто 5.

Один радиан соответствует $\frac{180^\circ}{\pi}$ градусам: 1 радиан $= \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45''$.

Для перевода угла из градусной меры в радианную используется формула

$$\alpha = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot n^\circ$$

Таким образом, чтобы найти радианную меру угла, равного n°, достаточно умножить градусную меру на $\frac{\pi}{180^\circ}$. В частности, радианная мера угла 180° равна π, углу 90° соответствует угол $\frac{\pi}{2}$ радиан.

Длина дуги, на которую опирается центральный угол, равный α рад, вычисляется по формуле $l = \alpha R$.

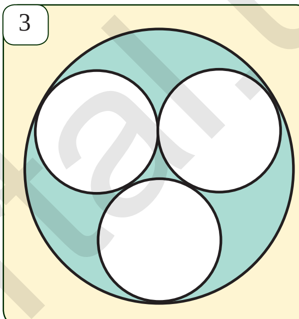
Задача. Найдите радианную меру углов треугольника, если градусная мера двух его углов равна 30° и 45°.

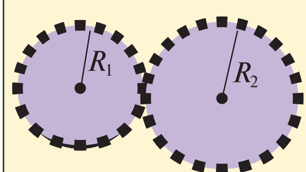
Решение. Радианная мера угла 30° вычисляется по формуле $30°\cdot\frac{\pi}{180°}=\frac{\pi}{6}$, 45° по формуле: $45°\cdot\frac{\pi}{180°}=\frac{\pi}{4}$. На основании теоремы о том, что сумма внутренних углов треугольника равна 180°, т.е. π, находим радианную меру третьего угла треугольника

$$\pi-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{12}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{7\pi}{12}$.

Задачи и задания


3



4

43.1. Найдите длину дуги окружности радиуса 6 *см*, градусная мера которой равна: а) 30°; б) 45°; в) 90°; г) 120°.

43.2. Найдите радианную меру угла а) 40°; б) 60°; в) 75°.

43.3. Найдите длину дуги окружности радиуса 5 см, на которую опирается центральный угол, радианная мера которого равна а) 1,2; б) $\frac{2\pi}{3}$; в) $\frac{5\pi}{6}$.

43.4. Найдите длину дуги окружности радиуса 5 см, на которую опирается центральный угол, радианная мера которого равна а) $\frac{\pi}{8}$; б) $\frac{2\pi}{5}$; в) $\frac{3\pi}{4}$.

43.5. В окружность с радиусом 12 *см* вписан треугольник ABC. Найдите длину дуги BC, не содержащей точку A, если а) $\angle A=30°$; б) $\angle A=120°$.

43.6. Докажите, что равные хорды отсекают от окружности равные дуги.

43.7*. Каждая из двух окружностей проходит через центр другой. Найдите отношение длины дуг, которые отсекает от каждой окружности их общая хорда.

43.8*. Три окружности одного и того же радиуса касаются друг друга внешним образом и касаются окружности радиуса R изнутри (*рис.* 3). Найдите: а) радиусы окружностей и б) сумму длин дуг, ограничивающих закрашенную на рисунке область.

Занимательная задача

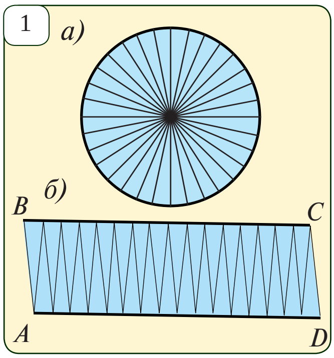
Два зубчатых колеса, изображенных на рис. 4, сцеплены друг с другом. Радиусы колес R_1 и R_2. Сколько оборотов совершит второе колесо, если первое сделает n оборотов?

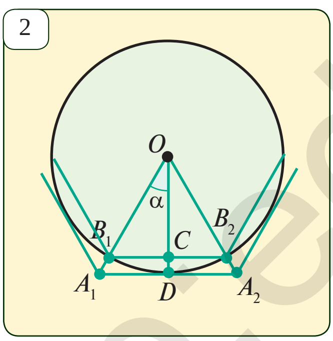
44 ПЛОЩАДЬ КРУГА

Определение. Фигура, образованная из всех точек плоскости, расстояние от которых до заданной точки O не больше R, называется *кругом*.

При этом точка O называется центром круга, а число R – радиусом круга.

Граница вышеуказанного круга совпадает с окружностью радиуса R с центром в точке O.





Активизирующее упражнение

На листе бумаги начертите жирной линией окружность и разбейте ее на равные части, проведя несколько ее диаметров в соответствии с рис. 1-а. Затем разрежьте круг на эти части и составьте из них фигуру F, как показано на рис 1.б. Если круг разрезан на достаточно большое число частей, то складывая их так, как показано на рисунке, убедимся в том, что фигура F имеет форму, достаточно близкую к прямоугольнику.

а) принимая во внимание, что фигура F очень мало отличается от прямоугольника $ABCD$, найдите приближенное значение длины стороны AB. (Указание: сравните сторону AB с радиусом круга);

б) чему равно приближенное значение "стороны" BC фигуры F? (стороны BC и AD части жирной линии, т.е. состоят из дужек окружности);

в) найдите теперь приближенное значение площади фигуры F, мало отличающейся от прямоугольника $ABCD$. Так как площадь фигуры есть площадь круга, сделайте вывод о ее величине.

Теорема. Площадь круга радиуса R равна πR^2.

Доказательство. Рассмотрим окружность радиуса R центром в точке O. Пусть площади описанного $A_1A_2 \ldots A_n$ и вписанного $B_1B_2 \ldots B_n$ правильных n-угольников равны S'_n и S''_n соответственно (*рис.* 2).

Найдем площади треугольников A_1OA_2 и B_1OB_2:

$$S'_{A_1OA_2}=\frac{1}{2}A_1A_2\cdot OD=\frac{1}{2}A_1A_2\cdot R; \quad S''_{B_1OB_2}=\frac{1}{2}B_1B_2\cdot OC=\frac{1}{2}B_1B_2\cdot OB_1\cos\alpha=\frac{1}{2}B_1B_2\cdot R\cos\alpha.$$

Тогда, $S'_n=n\cdot\frac{1}{2}A_1A_2\cdot R=\frac{1}{2}P_nR, \quad S''_n=n\cdot\frac{1}{2}B_1B_2\cdot R\cos\alpha=\frac{1}{2}P''_nR\cos\alpha$ (1)

Здесь P'_n и P''_n - периметры многоугольников $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$. Так как $\alpha = \frac{180^\circ}{n}$, то при достаточно больших n значение $\cos\alpha$ сколь угодно мало отличается от 1, а значения периметров P'_n и P''_n сколь угодно мало отличаются от значения длины окружности, т. е. $2\pi R$. Тогда согласно равенству (1), площади многоугольников для достаточно больших n приближаются к πR^2. Отсюда следует формула $S=\pi R^2$.

Теорема доказана.

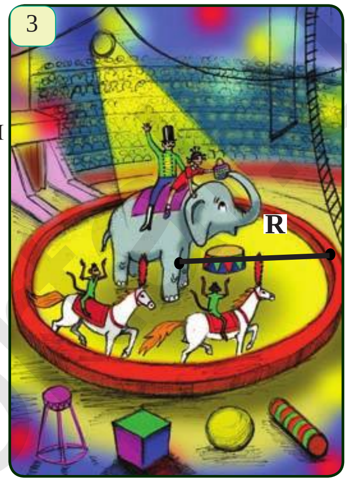
Задача. Длина окружности арены цирка равна 41 *м*. Найдите радиус и площадь арены.

Решение. 1) Из формулы для длины окружности находим радиус арены (*рис.* 3):

$$R = \frac{C}{2\pi} \approx \frac{41}{2 \cdot 3{,}14} \approx 6{,}53 \ (м).$$

2) Из формулы для площади круга находим площадь арены: $S=\pi R^2 \approx 3{,}14 \cdot 6{,}53^2 \approx 133{,}84$ ($м^2$).

Ответ: $R \approx 6{,}53$ *м*; $S \approx 133{,}84$ $м^2$.



3

Задачи и задания

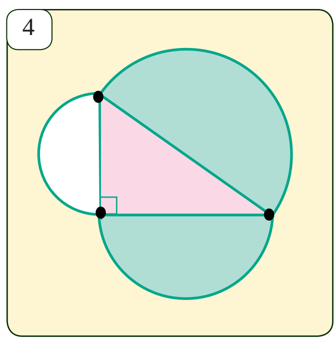
44.1. Дайте обоснование формуле для площади круга.

44.2. Заполните таблицу, используя формулу для площади S круга радиуса R (примите $\pi=3{,}14$).

R	2	5		$\frac{2}{7}$		54,3		6,25
S			9		49π		$\sqrt{3}$	

44.3. Как изменится площадь круга, если его радиус: а) увеличится в k раз; б) уменьшится в k раз?

44.4. Найдите площадь описанного около квадрата и вписанного в него круга, если сторона квадрата равна 5 см.


4

44.5. Найдите площади описанного около правильного треугольника и вписанного в него круга, если сторона треугольника равна $3\sqrt{3}$ *см*.

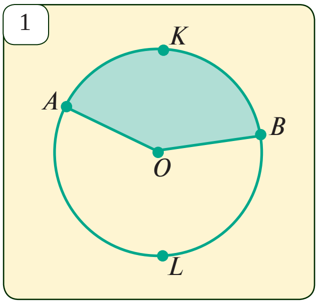
44.6. Из круга радиуса R вырезали квадрат наибольшей площади. Найдите площадь оставшейся части.

44.7. Найдите площадь круга, описанного около прямоугольника со сторонами 6 *см* и 7 *см*.

44.8. Найдите площадь круга, вписанного в ромб со стороной 10 см и острым углом 60°.

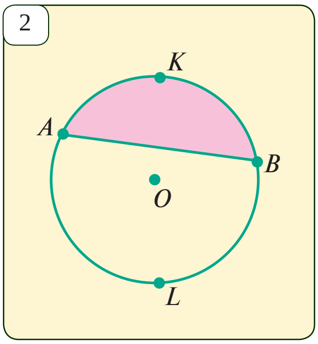
44.9*. На сторонах прямоугольного треугольника как на диаметрах построены полукруги. Покажите, что площадь полукруга, построенного на гипотенузе, равна полусумме площадей полукругов на катетах (*рис.* 4).

ПЛОЩАДЬ ЧАСТЕЙ КРУГА



Определение. Часть круга, ограниченная дугой окружности и двумя радиусами, соединяющими концы дуги с центром круга, называется *сектором*. Дуга, ограничивающая сектор, называется *дугой сектора*.

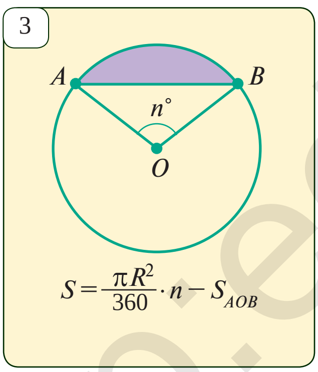
На рис.1 показаны два сектора с дугами AKB и BLA (первый из них закрашен).



Выведем формулу для площади сектора круга радиуса R, ограниченного дугой с угловой величиной $n°$. Так как площадь сектора, ограниченного дугой в 1°, равна $\frac{1}{360}$ части площади круга (сектора с дугой, равной 360°), то площадь сектора, ограниченного дугой в n°, вычисляется по формуле

$$S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot n \qquad \text{или} \qquad S = \frac{1}{2} R \cdot l$$

Здесь l – длина дуги сектора в $n°$.

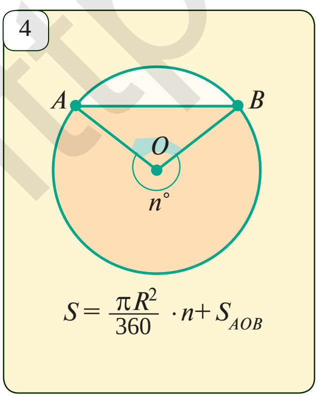


Определение. Часть круга, ограниченная дугой окружности и хордой, стягивающей эту дугу, называется **сегментом**.

На рис 2 изображены два сегмента, ограниченные дугами AKB и BLA (первый из них закрашен). Площадь S сегмента, отличного от полукруга, вычисляется по формуле

$$S = S_{сектор} \pm S_{\Delta} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot n \pm S_{AOB}$$

(см. рис. 3 и 4).



Задача. Сектор, ограниченный дугой 72°, имеет площадь 45π. Найдите радиус окружности.

Решение. По формуле для площади сектора,

$$\frac{\pi R^2}{360} \cdot 72 = 45\pi.$$

Отсюда, $R^2 = \frac{45\pi \cdot 360}{72\pi} = 225$, значит, $R = 15$.

Ответ: 15.

Задачи и задания

45.1. Выведите формулу для площади сектора.

45.2. Выведите формулу для площади сегмента.

45.3. Найдите площадь сектора и сегмента с радиусом 7 *см*, если ограничивающая его дуга имеет градусную меру: а) 30°; б) 45°; в) 120°; г) 90°.

45.4. На рис. 5 изображены правильный треугольник, квадрат и правильный шестиугольник со стороной *a*. Найдите площади закрашенных фигур. Здесь радиусы секторов равны половине стороны многоугольника.

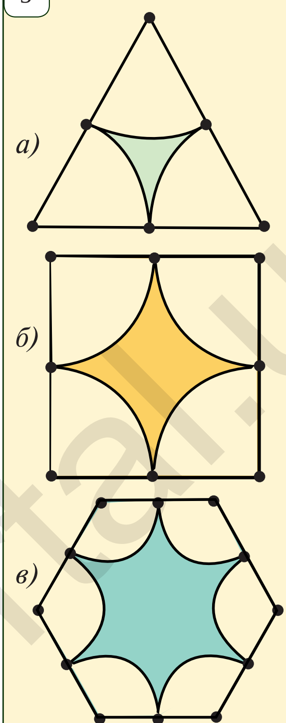
45.5. На мишени нарисованы четыре окружности с радиусами, равными 1, 2, 3, 4. Найдите площадь меньшего круга и каждого кольца (*рис.* 6).

45.6. В круге с радиусом 10 *см* проведена хорда той же длины. Найдите площади полученных сегментов.

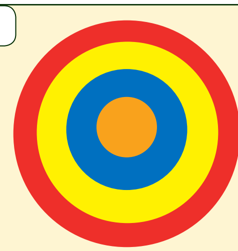
45.7. Расстояние между центрами двух кругов с радиусами 15 *см* равно 15 *см*. Найдите площадь общей части кругов.

45.8. Найдите площади правильных двенадцатиугольников, вписанных в круг с радиусом 10 *см* и описанных около него, и сравните результаты с площадью круга.

5



6



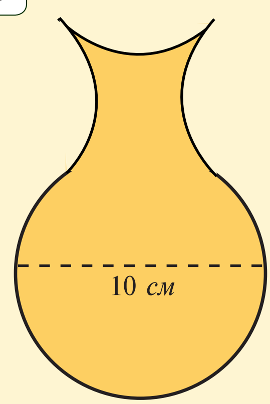
Занимательная задача

Разбейте вазу для цветов на рис. 7:

а) тремя прямыми на такие четыре части, чтобы из них можно было составить прямоугольник;

б) двумя прямыми на такие три части, чтобы из них можно было составить квадрат.

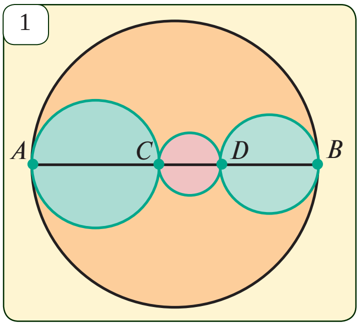
7



Исторические этюды. Много столетий подряд математики безуспешно пытались решить задачу о "квадратуре круга", т. е. задачу о построении квадрата, равновеликого данному кругу, с помощью циркуля и линейки. Только в конце XIX в. было доказано, что эта задача не имеет решения.

46 ПРАКТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Задача 1. Точки C и D делят диаметр AB окружности на три отрезка AC, CD и DB. Докажите, что сумма длин окружностей, построенных на отрезках AC, CD и DB, равна длине окружности, диаметром которой является отрезок AB (*рис.* 1).



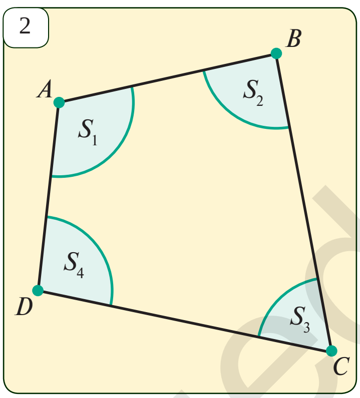
Решение. Найдем сумму длин C_1, C_2, C_3 окружностей, построенных на отрезках AC, CD и DB как на диаметрах. По формуле для длины окружности: $C_1+C_2+C_3=AC\cdot\pi+CD\cdot\pi+DB\cdot\pi=\pi(AC+CD+DB)$.

Но $AC+CD+DB=AB$ и длина C окружности, построенной на AB как на диаметре, равна $AB\cdot\pi$, поэтому

$$C_1+C_2+C_3=C.$$

Это равенство и требовалось доказать.

Задача 2. Пусть в вершинах четырехугольника $ABCD$ построены четыре сектора одного и того же радиуса. Никакая пара из этих секторов не имеет общих точек и радиус каждого из них равен 1 *см* (рис.2). Найдите сумму площадей этих секторов.



Решение. 1) Пусть углы при вершинах A, B, C, D четырехугольника равны α_1, α_2, α_3, α_4. Тогда по теореме о сумме внутренних углов четырехугольника

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=360^\circ.$$

2) По формуле для площади сектора ($R=1$ *см*),

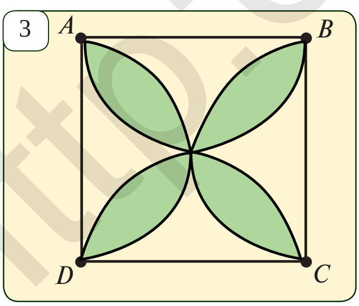
$$S_1=\frac{\pi}{360^\circ}\cdot\alpha_1,\quad S_2=\frac{\pi}{360^\circ}\cdot\alpha_2,\quad S_3=\frac{\pi}{360^\circ}\cdot\alpha_3,\quad S_4=\frac{\pi}{360^\circ}\cdot\alpha_4.$$

3) Найдем сумму площадей.

Тогда:

$$S_1+S_2+S_3+S_4=\frac{\pi}{360^\circ}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)=\frac{\pi}{360^\circ}\cdot360^\circ=$$
$$=\pi\ (см^2).$$

Ответ: π *см*^{2}.



Задачи и задания

46.1. Даны квадрат, периметр которого равен 1 *м* и окружность, длина которой равна 1 *м*. Сравните площади квадрата и круга, ограниченного этой окружностью.

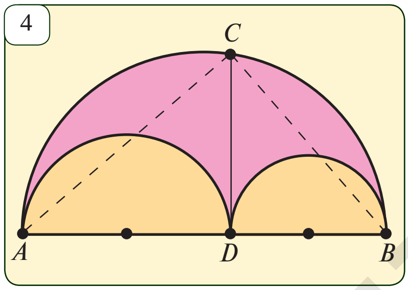
46.2. Из круга с радиусом 8 *см* вырезан сектор с углом 60°. Найдите площадь оставшейся части круга.

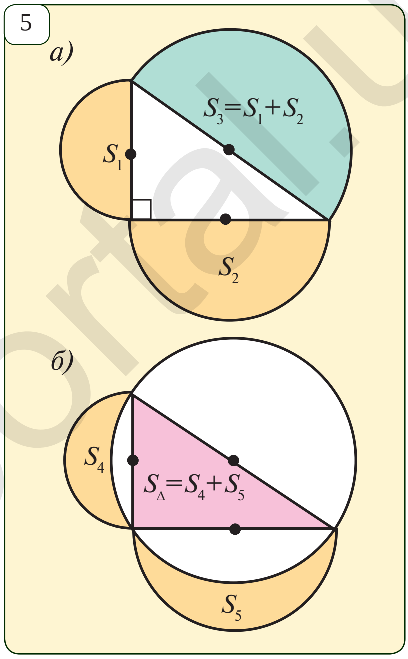
46.3. Найдите площадь круга, вписанного в ромб с диагоналями 6 *см* и 8 *см*.

46.4. Найдите площадь закрашенной фигуры на *рис.* 3. Здесь $ABCD$ — квадрат, $AB = 4$ *см*.

46.5*. На рис.4 закрашена фигура, которая называется “нож Архимеда”. Докажите, что его площадь вычисляется по формуле $\frac{\pi \cdot CD^2}{4}$ (при этом воспользуйтесь тем, что $\angle ACB = 90^\circ$ и $CD^2 = AD \cdot DB$).

46.6. Пусть $AD = 6$ *см*, $BD = 4$ *см*. Найдите площадь и периметр (сумму длин соответствующих дуг) фигуры, изображенной на рис.4.

4


5


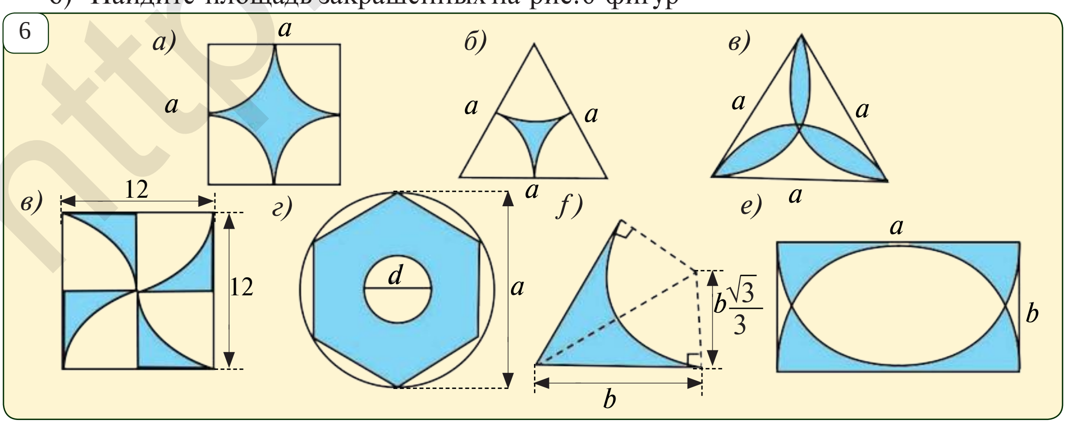
Исторические этюды. Луночки Гиппократа.

а) Луночками Гиппократа называются фигуры, ограниченные дугами двух окружностей, обладающие следующим свойством: с помощью их радиусов и хорд, стягивающих дуги, можно построить квадраты, равновеликие луночкам.

Используя теорему Пифагора, можно доказать, что площадь полукруга, построенного на гипотенузе как на диаметре, равна сумме площадей полукругов, построенных аналогичным образом на катетах (рис. 5- а). Поэтому сумма площадей луночек на рис. 5-б, равна площади треугольника (проверьте непосредственно!). Если вместо треугольника на рисунке взять равнобедренный прямоугольный треугольник, то площадь каждой из луночек будет равна половине площади треугольника. Занимаясь задачей о квадратуре круга, древнегреческий ученый Гиппократ из Хиоса (ок.V в. до н.э.) нашел три вида луночек, равновеликих многоугольникам.

Полный список луночек Гиппократа был составлен лишь в XIX - XX вв.

б) Найдите площадь закрашенных на рис.6 фигур

6


47 ПРОВЕРЬТЕ СВОИ ЗНАНИЯ

I. Тесты

1. Найдите радианную меру угла 45°.
A) 1; B) $\frac{\pi}{2}$; C) $\frac{\pi}{4}$; D) $\sqrt{2}$.

2. Найдите длину дуги окружности радиуса 3 *см*, образованную центральным углом, равным 150°.
A) $\frac{5\pi}{2}$ *см*; B) $\frac{5\pi}{3}$ *см*; C) $\frac{10\pi}{3}$ *см*; D) $\frac{5\pi}{4}$ *см*.

3. Найдите длину дуги окружности радиуса 6 *см*, образованную центральным углом, равным $\frac{5\pi}{4}$ радиан.
A) $\frac{15\pi}{2}$ *см*; B) $\frac{5\pi}{6}$ *см*; C) $\frac{4\pi}{3}$ *см*; D) $\frac{5\pi}{2}$ *см*.

4. Найдите длину окружности, описанной около квадрата со стороной 5 *см*.
A) $5\sqrt{2}\pi$; B) $\sqrt{2}\pi$; C) $3\sqrt{2}\pi$; D) 5π.

5. Найдите площадь круга, с диаметром, равным 6.
A) 9π; B) 6π; C) $3\sqrt{2}\pi$; D) 12π.

6. Найдите площадь кругового сектора, если градусная мера соответствующей дуги равна 150°, а радиус круга равен 6 *см*.
A) 15π см^2; B) 6π см^2; C) $30\sqrt{2}\pi$ см^2; D) 24π см^2.

7. Найдите площадь кругового сектора, если длина соответствующей дуги равна 12 *см*, а радиус круга равен 6 *см*.
A) 15π см^2; B) 6π см^2; C) $30\sqrt{2}\pi$ см^2; D) 24π см^2.

8. Найдите площадь кругового сегмента, если градусная мера соответствующей дуги равна 120° , а радиус круга равен 3 .
A) $6\pi - 4\sqrt{3}$; B) $6\pi + 4\sqrt{3}$; C) $3\pi - 4\sqrt{3}$; D) $3\pi + 4\sqrt{3}$.

II. Задачи

1. Сторона правильного 8-угольника *ABCDEFKL* равна 6 *см*. Найдите диагональ *AC*.

2. В окружность радиуса 4 *дм* вписан квадрат. Найдите длины дуг, отделяемых хордами, соединяющими середины соседних сторон.

3. Длина дуги 90° равна 15π *см*. Найдите радиус окружности.

4. В окружности радиуса 20 отмечена дуга длины 10π. Найдите центральный угол, соответствующий этой дуге.

5. Общая хорда двух кругов отделяет дуги соответствующих окружностей в 60° и 120°. Найдите отношение площадей кругов.

6. Найдите площади вписанного в треугольник со сторонами 3, 4, 5 круга и описанного около него круга.

7. Хорда окружности стягивает дугу 60°. Найдите отношение площадей сегментов, отсекаемых этой хордой.

8. Найдите отношение площади правильного шестиугольника к площади вписанного в него круга.

9. $ABCDEF$ - правильный шестиугольник со стороной, равной a. Окружность с центром в точке A и радиусом a делит этот шестиугольник на две части. Найдите площадь каждой части.

10. В прямоугольном треугольнике ABC угол $\angle A=72°$, $\angle C=90°$, $BC=15$ *см*. Найдите длину дуги окружности с диаметром BC, которая лежит внутри треугольника ABC.

11. Дан правильный восьмиугольник, вписанный в круг. Два радиуса, проведенных из вершин смежных сторон восьмиугольника, разбивают круг на два сектора. Найдите отношение площадей этих секторов.

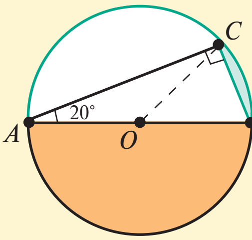
12. В прямоугольном треугольнике ABC угол $\angle A=20°$, $\angle C=90°$, $AB=18$ *см*. Сторона BC разделяет описанный около треугольника круг на два сегмента. Найдите площадь закрашенного сегмента (*рис*.1).

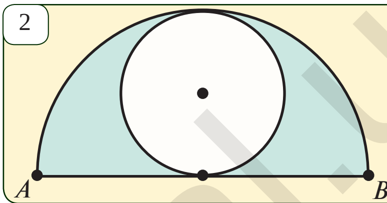
13. Меньшая окружность касается большей окружности и ее диаметра AB. Найдите площадь закрашенной на рис.2 фигуры, если окружность касается диаметра в центре A и $AB=4$.

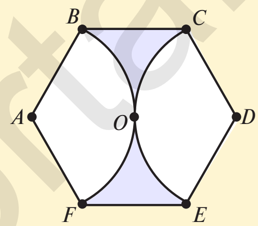
14. Сторона правильного шестиугольника $ABCDEF$ равна 6, а его центр находится в точке O. Окружности с равными радиусами и с центрами в точках A и D касаются в точке O. Найдите площадь закрашенной области (*рис*.3).

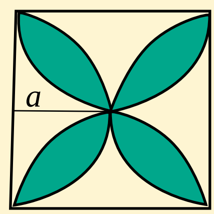
15. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C=90°$, $AC=4$, $CB=2$. Окружность с центром на гипотенузе касается его катетов. Найдите длину этой окружности.

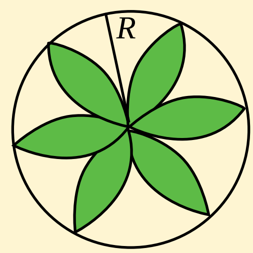
16. Найдите площадь закрашенных фигур на *рис*.4. Определите, как они построены.

1


2


3


4
а)


б)


III. Проверьте себя (образец контрольной работы)

1. Дан квадрат со стороной 6 *см*. Найдите длину описанной окружности и площадь вписанного круга.
2. Радиус вписанной в правильный многоугольник со стороной 24 *см* окружности равен $4\sqrt{3}$ *см* Найдите радиус описанной окружности.
3. Длина дуги окружности в 240° равна 24 *см*. Найдите:
а) радиус окружности; б) площадь соответствующего сектора 240°;
в) площадь соответствующего сегмента 240°.

Занимательная задача

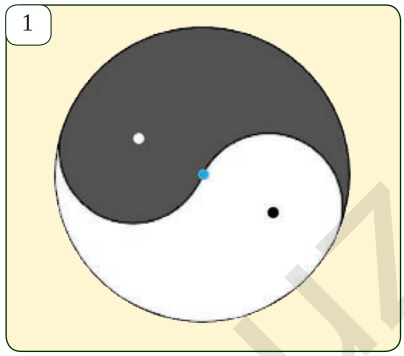
Инь и Янь

На рис.5 изображен китайский символ «Инь и Янь», выражающий существующие в природе противоположности.

а) покажите, что площади Инь и Янь равны;

б) постройте прямую, которая разбивает каждую из фигур Инь и Янь на части, площади которых равны.

в) найдите периметры фигур Инь и Янь.



Исторические этюды. Вычисление длины окружности с древнейших времен было актуальной задачей. Метод, состоявший в приближении длины окружности периметром вписанного правильного многоугольника, широко применялся на практике.

Математики Центральной Азии занимались задачей построения правильных многоугольников, выражением стороны через радиус окружности, описанной около многоугольника. Абу Райхан Беруни в трактате "Канон Масъуда", решая задачу об определении стороны правильного вписанного многоугольника, рассматривает метод нахождения стороны правильного пятиугольника, шестиугольника, семиугольника, десятиугольника. В результате вычислений он находит значение $\pi \approx 3{,}14$.

В папирусах и клинописных источниках Древнего Египта и Вавилона для π принималось значение 3. Этого было достаточно для решения задач того времени. Позже древние римляне использовали значение 3,12. Найденное Архимедом значение числа π, равное 3,14, было вполне удовлетворительным для решения прикладных задач.

В китайской математике для $\pi \approx 3{,}155$ … и 22/7, в индийской "Sutva Sutra" («Правило веревки») - 3,008 и 3,1416 … и $\sqrt{10} \approx 3{,}162$ …

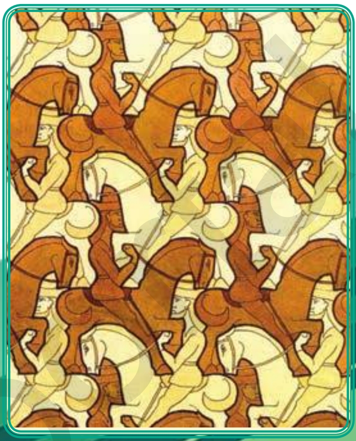
Один из выдающихся ученых Самаркандской школы Улугбека Гиясиддин Джамшид аль-Коши в "Трактате об окружности" (1424 г.) путем последовательного удвоения числа сторон правильных вписанных и описанных многоугольников приходит к многоугольнику с $3 \cdot 2^{28} = 800\ 335\ 168$ сторонами и, найдя его периметр, вычисляет значение $\pi = 3{,}1\ 415\ 826\ 535\ 897\ 932$. Это составляет 16 верных знаков.

Трактат аль-Коши оставался долгое время неизвестным в Европе. Бельгиец ван Роумен в 1597 г., применив метод Архимеда к многоугольнику с 2^{30} сторонами, находит для числа π 17 знаков после запятой. Голландец ван Цейлен (1540-1610) вычислил 35 знаков числа π. В настоящее время на ЭВМ найдены более нескольких миллионов знаков числа π.

Для повседневных вычислений достаточно принимать 3,14, для математических вычислений − 3,1416, для астрономии и космонавтики − 3,1415826.

Глава IV

МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ И КРУГЕ



В результате изучения этой главы вы приобретете следующие знания и парктические навыки:

Знания:

√ *Знать свойства пропорциональных отрезков;*

√ *Знать свойства высоты в прямоугольном треугольнике, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу;*

√ *Знать свойства отрезков пересекающихся хорд и отрезков секущих.*

Практические навыки:

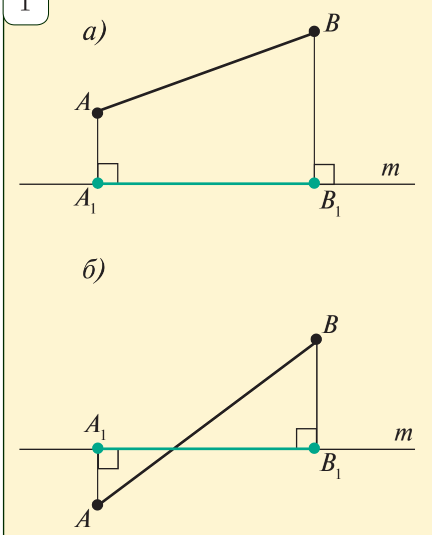
√ *решать задачи на отношения отрезков и пропорциональные отрезки;*

√ *решать задачи с использованием свойств высоты в прямоугольном треугольнике, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу;*

√ *решать задачи на применение свойств отрезков пересекающихся хорд и отрезков секущих.*

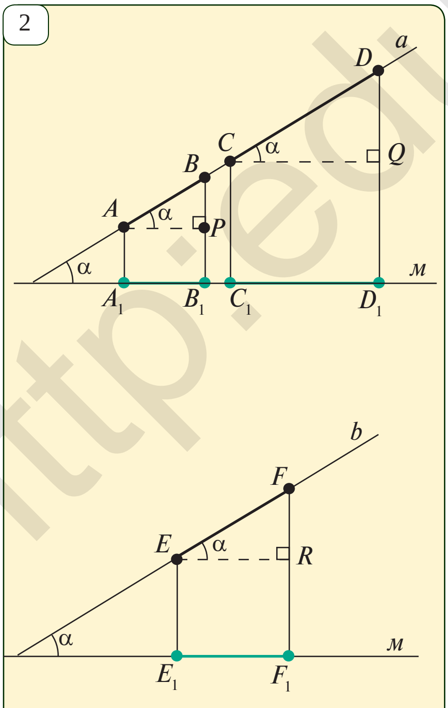
48 ПРОЕКЦИЯ ОТРЕЗКОВ И ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ

1



A_1 — проекция точки A,
B_1 — проекция точки B,
A_1B_1 — проекция отрезка AB на прямую m

2



Активизирующее упражнение

1. Что понимается под отношением отрезков?
2. Какие отрезки называют пропорциональными?
3. Сформулируйте теорему Фалеса.

Пусть на плоскости заданы прямая m и отрезок AB. Опустим из точек A и B перпендикуляры AA_1 и BB_1, на прямую m (*рис.* 1). Отрезок A_1B_1 называется *проекцией* отрезка AB на прямую m.

Построение проекции A_1B_1 отрезка AB на прямую m называется *проецированием*.

Теорема. ***Пусть даны отрезки, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых. Их проекции на некоторую прямую пропорциональны данным отрезкам.***

$a||b$,
A_1B_1 - проекция AB,
C_1D_1 - проекция CD,
E_1F_1 - проекция EF на прямую m (рис.2)

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{C_1D_1}{CD}=\frac{E_1F_1}{EF} \quad (1)$$

Доказательство. а) если прямые a и b параллельны прямой m, то $AB=A_1B_1$, $CD=C_1D_1$, $EF=E_1F$. Ясно, что равенство (1) будет выполнено.

б) Если прямые a и b перпендикулярны прямой m, то точки A_1 и B_1, C_1 и D_1, E_1 и F_1 совпадут. Значит, длины отрезков A_1B_1, C_1D_1, E_1F_1 обратятся в нуль и равенство (1) будет выполнено.

в) Теперь рассмотрим оставшиеся случаи. Построим прямоугольные треугольники ABP, CDQ, EFR как показано на рис. 2. Так как $a||b$ то $\angle BAP=\angle DCQ=\angle FER$.

Следовательно, прямоугольные треугольники ABP, CDQ и EFR подобны, откуда следует, что $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{C_1D_1}{CD}=\frac{E_1F_1}{EF}$

Теорема доказана.

Задача. Отрезки AB и CD лежат на параллельных прямых. Найдите проекцию отрезка CD на некоторую прямую m, если $AB = 12$ *см*, $CD = 15$ *см*, а проекция AB на прямую равна $m = 8$ *см*.

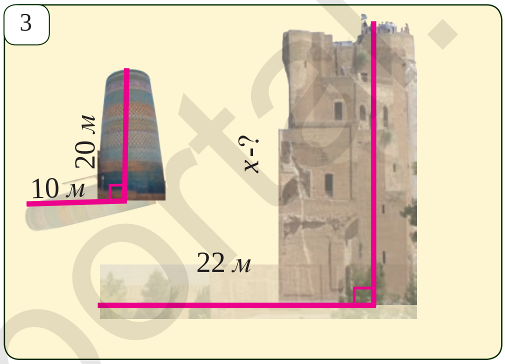
Решение. Пусть x - проекция отрезка CD на прямую m. Тогда по доказанной теореме, в соответствии с условием задачи:

$$\frac{x}{15}=\frac{8}{12}.$$

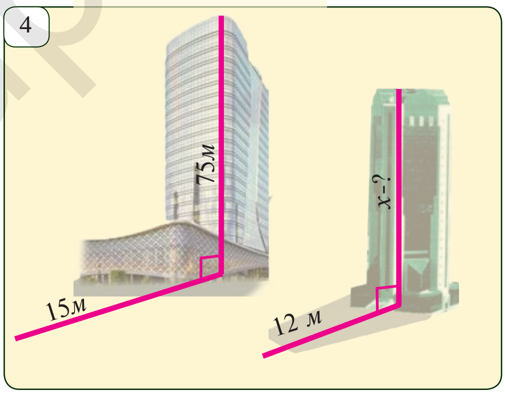
Из этого равенства найдем $x = 10$.

Ответ: 10 *см*.

3



4



Задачи и задания

48.1. Что такое проекция отрезка на данную прямую?

48.2. Докажите, что проекции на некоторую прямую отрезков, лежащих на одной прямой или параллельных прямых, пропорциональны заданным отрезкам.

48.3. Угол между прямыми a и b равен 45°. Пусть на прямой а лежит отрезок AB, длина которого 10 *см*. Найдите проекцию отрезка AB на прямую b.

48.4. Концы отрезка AB удалены от прямой l на 9 *см* и 14 *см*. Найдите проекцию отрезка AB на прямую l, если отрезок AB не пересекает эту прямую и $AB = 13$ *см*.

48.5. Найдите высоту зданий по данным, указанным на рис. 3 и 4.

48.6. Начертите прямую и не параллельный ей отрезок. Найдите проекцию отрезка на эту прямую.

48.7. На координатной плоскости даны точки $A(2;3)$ и $B(3;-4)$. Найдите длины проекций отрезка AB на координатные оси.

48.8. Известно, что угол между прямыми a и b равен α. На прямой a лежит отрезок AB. Найдите проекцию отрезка AB на прямую b.

48.9*. Проекции отрезков AB и CD на прямую l равны между собой. Что можно сказать о длине отрезков AB и CD? Приведите примеры.

49 СВОЙСТВА ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ ОТРЕЗКОВ

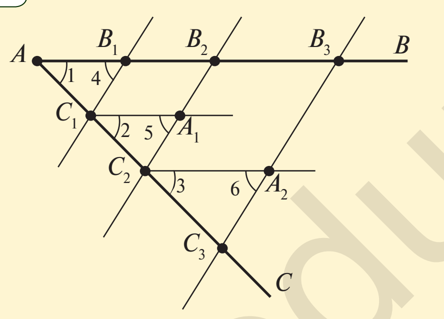
Докажем важное свойство, являющееся важным обобщением теоремы Фалеса.

***Теорема.* Параллельные прямые, пересекающие обе стороны угла, отсекают на них пропорциональные отрезки.**

$\angle BAC,\ B_1C_1 \| B_2C_2 \| B_3C_3$ (*рис.*1) $\Rightarrow$ $\dfrac{AB_1}{AC_1} = \dfrac{B_1B_2}{C_1C_2} = \dfrac{B_2B_3}{C_2C_3}$

Доказательство. Проведем через точки C_1 и C_2 прямые C_1A_1 и C_2A_2, параллельные прямой AB. Тогда, во-первых, $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ как соответствующие углы при параллельных прямых AB, C_1A_1 и C_2A_2 и секущей AC. Во-вторых, $\angle 4 = \angle 5 = \angle 6$ как углы с соответственно параллельными сторонами.

1



Следовательно, по признаку УУ подобия треугольников $\Delta AB_1C_1 \backsim \Delta C_1A_1C_2 \backsim \Delta C_2A_2C_3$.

Отсюда, $\dfrac{AB_1}{AC_1} = \dfrac{C_1A_1}{C_1C_2} = \dfrac{C_2A_2}{C_2C_3}$ (1).

Кроме этого, четырехугольники $B_1C_1A_1B_2$ и $B_2C_2A_2B_3$ параллелограммы, так как

$B_1C_1 \| B_2C_2 \| B_3C_3$ — по условию;

$AB \| C_1A_1 \| C_2A_2$ — по построению.

Поэтому противоположные стороны этих параллелограммов равны:

$$C_1A_1 = B_1B_2 \quad \text{и} \quad C_2A_2 = B_2B_3. \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует, что $\dfrac{AB_1}{AC_1} = \dfrac{B_1B_2}{C_1C_2} = \dfrac{B_2B_3}{C_2C_3}$.

Теорема доказана.

***Практическое упражнение.* Деление отрезка в данном отношении.**

Разделите данный отрезок a на четыре части в отношении $m:n:l:k$. Для этого выполним поочередно следующие шаги.

1-ый шаг. Начертив произвольно выбранный угол, последовательно отложим на одной из его сторон отрезки $OA = m$, $AB=n$, $BC=l$ и $CD=k$ так, как это показано на рис. 2.

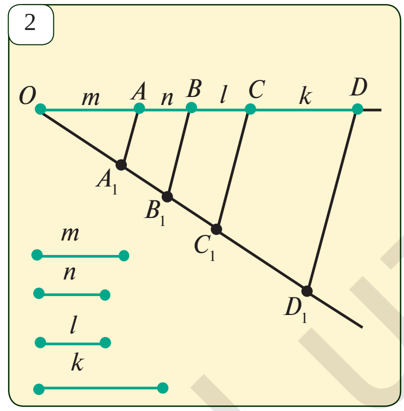
2-ой шаг. На второй стороне угла отложим отрезок OD_1, равный a.

3-ий шаг. Соединим точки D и D_1.

4-ый шаг. Через точки A, B, C проведем отрезки AA_1, BB_1 и CC_1, параллельные DD_1.

По доказанной теореме, данный отрезок $a=OD_1$ разделится точками A_1, B_1, C_1 и D_1, в отношении $m:n:l:k$.

Задание: Обоснуйте это построение самостоятельно.



Практическое задание. Построение четвертого пропорционального отрезка.

Даны отрезки a, b и c. Известно, что отрезки a и b пропорциональны отрезкам c и d, то есть $a:b=c:d$. Постройте отрезок d (*рис.* 3).

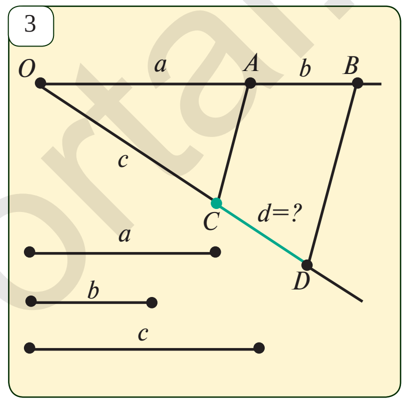
1-ый шаг. На одной из сторон произвольно выбранного угла отложим отрезки $OA=a$ и $AB=b$ так, как показано на рис. 3.

2-ой шаг. На второй стороне отложим отрезок $OC=c$.

3-ий шаг. Соединим точки A и C.

4-ый шаг. Через точку B проведем прямую BD, параллельную AC.

Задание: Обоснуйте утверждение: отрезок CD является искомым отрезком d.



Задачи и задания

49.1. Дан отрезок с длиной 42 *см*. Разбейте его на части в отношении: а) 5:2; б) 3:4:7; в) 1:5:1:7.

49.2. На рисунке каждая из точек деления отсекает единичный отрезок. Найдите отношения отрезков AB и CD, EF и MN, AC и DF, AN и CE, EN и BM.

49.3. Отрезки m, n пропорциональны отрезкам l и k. Постройте четвертый пропорциональный отрезок k и найдите его длину, если: а) $m = 4$ *см*, $n = 3$ *см* и $l = 8$ *см*; б) $m = 2$ *см*, $n = 3$ *см* и $l = 7$ *см*.

49.4. Найдите каждую сторону четырехугольника, если его периметр равен 54 *см* и стороны относятся как 3:4:5:6.

49.5. Величины углов четырехугольника относятся как 3:4:5:6. Найдите его меньший угол.

49.6. Заданы отрезки длинами 4,5 и 6. Постройте отрезок длиной 4,8.

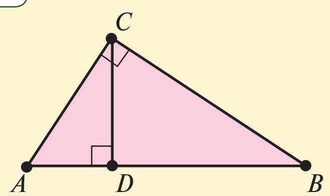
49.7*. Одна из сторон четырехугольника с периметром 60 *см* равна 15 *см*, остальные стороны относятся как 2:3:4. Найдите его большую сторону.

50 ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ОТРЕЗКИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Свойство. **Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, делит его на два треугольника, подобных данному.**

$\Delta ABC, \angle C=90°$, CD — *высота* (*рис.* 1) ⇒ $\Delta ABC \sim \Delta ACD$, $\Delta ABC \sim \Delta CBD$

1



Доказательство. Треугольники ABC и ACD – прямоугольные, а угол A – их общий угол. Значит, $\Delta ABC \sim \Delta ACD$. Аналогично, треугольники ABC и CBD – прямоугольные, а угол B – их общий угол. Значит, $\Delta ABC \sim \Delta CBD$. Свойство доказано.

Отрезки AC и BD называются проекциями катетов AC и BC на гипотенузу.

Определение. Если для отрезков a, b и c выполнено $a:b = b:c$, то отрезок b называется *средним пропорциональным отрезком* отрезков a и c.

Условие средней пропорциональности можно записать в виде $b^2=ac$ или $b=\sqrt{ac}$. По доказанному выше свойству, можно легко доказать следующие теоремы:

Теорема 1. **Высота прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого угла, является средним пропорциональным проекций катетов на гипотенузу.**

Действительно, согласно доказанному свойству $\Delta ACD \sim \Delta CBD$.

Отсюда следует, что $\frac{AD}{CD}=\frac{CD}{BD} \Rightarrow CD^2=AD \cdot BD \Rightarrow CD=\sqrt{AD \cdot BD}.$

Теорема 2. **Катет прямоугольного треугольника является средним пропорциональным гипотенузы и проекции этого катета на гипотенузу (*рис.* 1).**

Действительно, согласно доказанному свойству $\Delta ABC \sim \Delta ACD$.

Отсюда следует, что $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AD} \Rightarrow AC^2=AB \cdot AD \Rightarrow AC=\sqrt{AB \cdot AD}.$

Точно также можно доказать, что $BC=\sqrt{BD \cdot AB}$.

Задача. В прямоугольном треугольнике с катетами 15 *см* и 20 *см* найдите проекцию меньшего катета на гипотенузу.

ΔABC, $\angle C=90°$, CD — *высота*, $AC=15$ *см*, $BC=20$ *см* (*рис.* 1) ⇒ $AD=?$

Решение. 1) По теореме Пифагора найдем гипотенузу треугольника: $AB^2=AC^2+BC^2=15^2+20^2=625$, т.е. $AB=25$ *см*.

2) По второй теореме найдем отрезок AD:

$$AC^2=AB\cdot AD \Rightarrow AD=\frac{AC^2}{AB}=\frac{15^2}{25}=9\ (см).$$

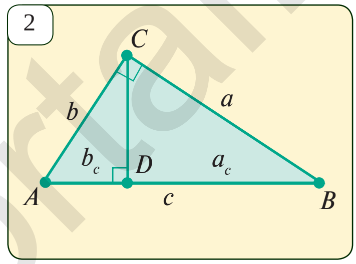
Ответ: 9 *см*.

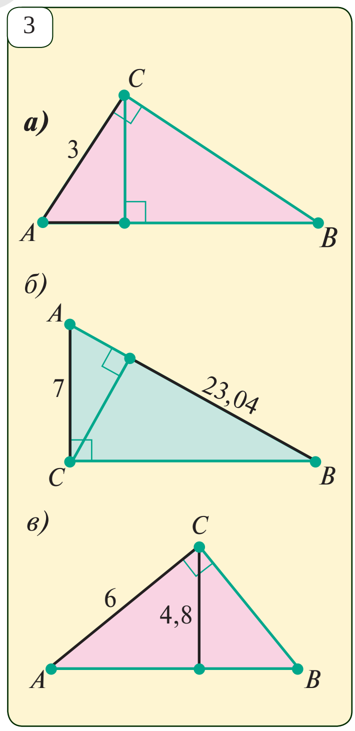
Из теоремы 2 как следствие вытекает **доказательство теоремы Пифагора, приведенное самим Пифагором** *(рис. 1)*. Согласно теореме 2,

$$\left.\begin{matrix} AC^2=AD\cdot AB \\ BC^2=BD\cdot AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow AC^2+BC^2=AD\cdot AB+BD\cdot AB=AB\cdot(\underbrace{AD+BD}_{AB})=AB\cdot AB=AB^2.$$

Таким образом, $AC^2+BC^2=AB^2$.

Задачи и задания





50.1. Докажите, что *(рис. 2)*:

а) $\Delta ACD \sim \Delta CBD \sim \Delta ABC$;

б) $b^2=b_c\cdot c$, $a^2=a_c\cdot c$; в) $h_c^2=a_c\cdot b_c$.

50.2. В прямоугольном треугольнике высота, опущенная на гипотенузу, делит гипотенузу на отрезки длиной 9 *см* и 16 *см*. Найдите стороны прямоугольного треугольника.

50.3. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 15 *см*, а один из катетов 9 *см*. Найдите проекцию второго катета на гипотенузу.

50.4. По данным на рис. 3 найдите стороны треугольника ABC.

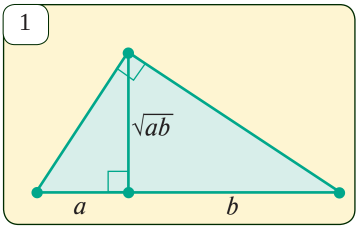
50.5*. В прямоугольном треугольнике катеты относятся как 4:5. Найдите отношение проекций катетов на гипотенузу.

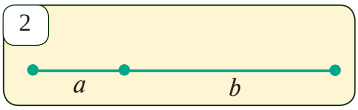
50.6*. Пусть в прямоугольном треугольнике катеты относятся как 3:2. Одна из проекций катетов на гипотенузу больше другой на 6 *см*. Найдите площадь треугольника.

50.7. Найдите площадь прямоугольного треугольника, у которого проекции катетов на гипотенузу равны 2 *см* и 18 *см*.

50.8*. В треугольнике ABC, $\angle C=90^\circ$, CD − высота, CE — биссектриса, а $AE:EB=2:3$. Найдите отношения а) $AC:BC$; б) $S_{ACE}:S_{BCE}$; в) $AD:BD$.

51 ПОСТРОЕНИЕ СРЕДНЕГО ПРОПОРЦИОНАЛЬНОГО ДВУХ ЗАДАННЫХ ОТРЕЗКОВ



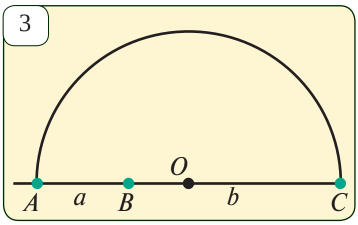


Мы видели, что если в прямоугольном треугольнике высота, проведенная из вершины прямого угла, делит гипотенузу на отрезки a и b, то эта высота равна $\sqrt{ab}$ (*рис.* 1).

Значит, для решения задачи о построении среднего пропорционального двух отрезков a и b достаточно построить прямоугольный треугольник:

1) длина гипотенузы которого равна $a+b$ (*рис.* 2);

2) высота которого, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу, делит гипотенузу на части a и b.

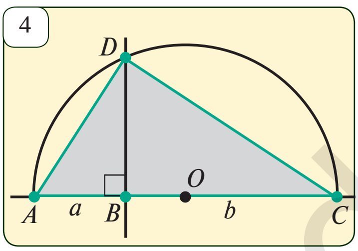


Воспользуемся для этого тем, что центр окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника, совпадает с серединой гипотенузы (*рис.* 3).

Построение:

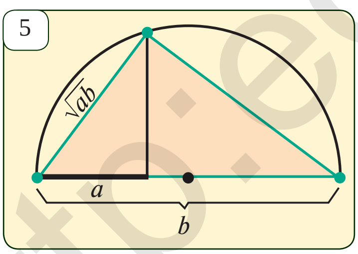
1) Построим прямую и отметим на ней точки A, B и C так, чтобы было $AB = a$ и $BC = b$ (*рис.* 3).

2) Найдем середину O отрезка AC и построим полуокружность с центром в точке O и диаметром AC (*рис.* 3).



3) Проведем через точку B прямую, перпендикулярную прямой AC (*рис.* 4). Пусть эта прямая пересекает полуокружность в точке D. Тогда треугольник ADC — прямоугольный и $BD = \sqrt{ab}$ — искомый отрезок.

Построение закончено.



При построении среднего пропорционального отрезка можно использовать и то, что катет является средним пропорциональным между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу (*рис.* 5).

Задачи и задания

51.1. Даны отрезки с длинами a и b. Постройте отрезок длиной $\sqrt{ab}$.

51.2. Даны отрезки с длинами a и b. Используя теорему Пифагора, постройте отрезки с длинами: а) $\sqrt{a^2+b^2}$; б) $\sqrt{a^2-b^2}$.

51.3. Дан отрезок длины 1. Постройте отрезки с длинами а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{5}$; г) $\sqrt{6}$; д) $\sqrt{18}$; е) $\sqrt{30}$.

51.4. По данным на рис. 6 найдите площадь треугольника ABC.

51.5. Из точки C окружности на диаметр AB опущен перпендикуляр CD. Найдите площадь круга, если $CD=12$ *см*, $AD=24$ *см*.

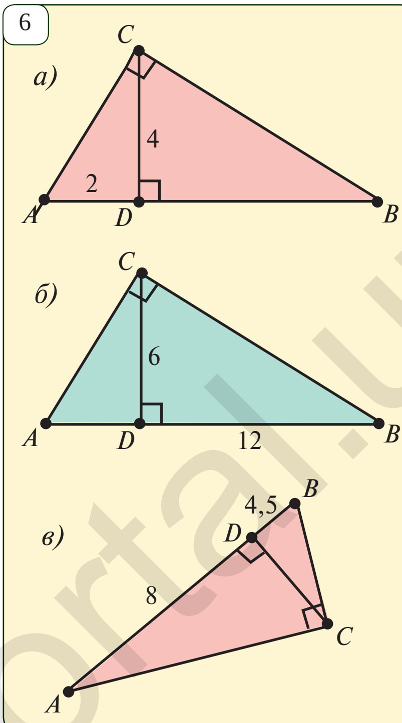
51.6. Найдите площадь треугольника ABC, из задачи 51.5.

51.7. В прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит гипотенузу на части в отношении 5:3. Найдите отношение отрезков, на которые делит гипотенузу высота, опущенная из вершины прямого угла.

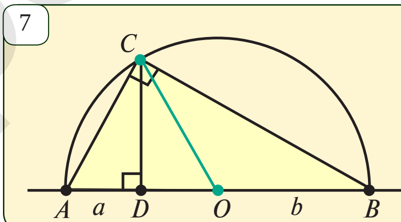
51.8. В окружность с радиусом 8 *см* вписан прямоугольный треугольник с углом 30°. Вне треугольника находятся три сегмента круга. Найдите площади этих сегментов.

51.9*. На рис. 7 $AD = a$, $DB=b$, значит, $OC=\dfrac{a+b}{2}$ (O— центр окружности). Воспользовавшись данными рисунка, докажите неравенство $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

6



7

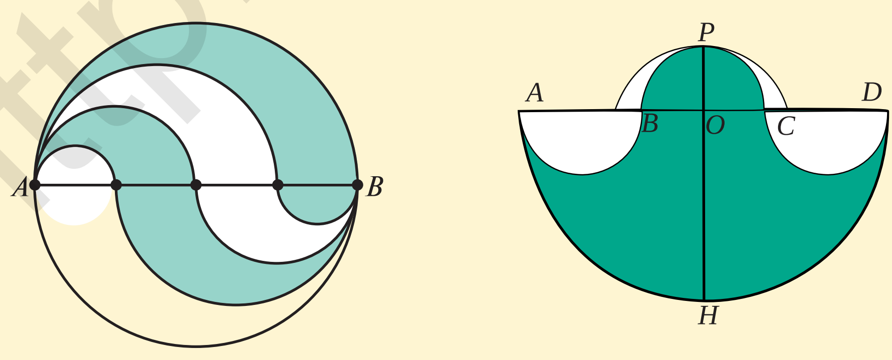


Занимательные задачи

1. Диаметр AB окружности разделен на четыре равные части и построены полуокружности с концами в этих точках, как показано на рис 8. Найдите площади закрашенных на рисунке фигур, если $AB=d$.

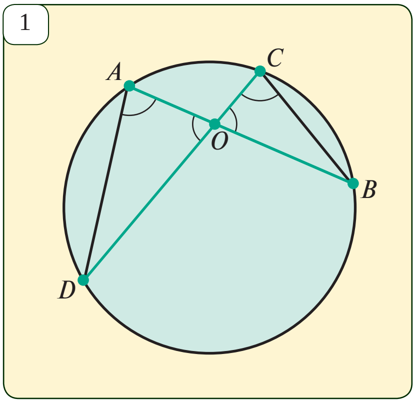
2. Отрезки AB и CD на рис.9 равны. Точка O − середина отрезка AD. Отрезки AB, CD, AD и BC − диаметры полукругов. Докажите, что площадь ограниченной этими полукругами фигуры равна площади круга диаметра PH. Здесь отрезок PH перпендикулярен отрезку AD в точке O.

8



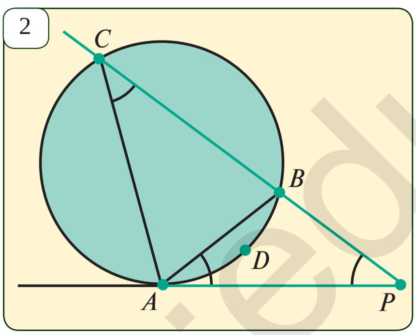
ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ОТРЕЗКИ В КРУГЕ

Теорема 1. Если хорды AB и CD окружности пересекаются в точке O, то имеет место равенство $AO\cdot OB=CO\cdot OD$.



Доказательство. Пусть хорды AB и CD расположены так, как показано на рис. 1. Соединим их концы хордами AD и BC. $\angle BAD=\angle BCD$, так как они опираются на одну и ту же дугу. Ясно, что и $\angle AOD=\angle BOC$. Тогда по признаку УУ подобия, треугольники AOD и COB подобны. Из пропорциональности сходственных сторон: $\dfrac{OD}{OB}=\dfrac{AO}{CO}$ или $AO\cdot OB=CO\cdot OD$. *Теорема доказана.*

Теорема 2. Пусть из точки P из внешней части окружности, проведена касательная PA (A — точка касания) и прямая, пересекающая окружность в точках B и C, тогда $PA^2=PB\cdot PC$.

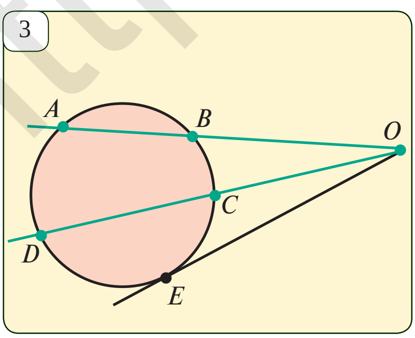


Доказательство. Рассмотрим треугольники ABP и CPA (*рис.* 2). Тогда,

$\angle C=\dfrac{ADB}{2}=\angle BAP$ и $\angle P$ — их общий угол. Значит, треугольники ABP и CPA подобны по признаку УУ подобия. Отсюда, $\dfrac{PA}{PC}=\dfrac{PB}{PA}$ или $PA^2=PB\cdot PC$.

Теорема доказана.

Задача. Точки A, B, C и D разбивают окружность на дуги AB, BC, CD и AD. Докажите, что если лучи AB и DC пересекаются в точке O, то $OA\cdot OB=OC$.



Решение. Начертим чертеж (*рис.* 3), соответствующий условию задачи и проведем из точки O касательную OE к окружности. Тогда по теореме 2:

$$\left.\begin{array}{l} OB\cdot OA=OE^2 \\ OC\cdot OD=OE^2 \end{array}\right\}\Rightarrow OA\cdot OB=OC\cdot OD.$$

Задачи и задания

52.1. По данным на рис.4 найдите неизвестный отрезок x.

52.2. Из точки A к окружности проведены касательная AB (B — точка касания) и секущая, пересекающая окружность в точках C и D. Найдите:

а) отрезок AD, если $AB = 4$ *см*, $AC = 2$ *см*;

б) отрезок AC, если $AB = 5$ *см*, $AD = 10$ *см*;

в) отрезок AB, если $AC = 3$ *см*, $AD = 2{,}7$ *см*.

52.3. Вокружность вписан четырехугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке O. Найдите:

а) отрезок OC, если $AO = 10$ *дм*, $BO = 6$ *дм*, $DO = 15$ *дм*;

б) отрезок OC, если $CD = 10$ *дм*, $OD = 8$ *дм*, $AB = 4$ *дм*.

52.4. Диаметр AB окружности и перпендикулярная ему хорда CD пересекаются в точке E. Найдите хорду CD, если $AE = 2$ *см*, $EB = 8$ *см*.

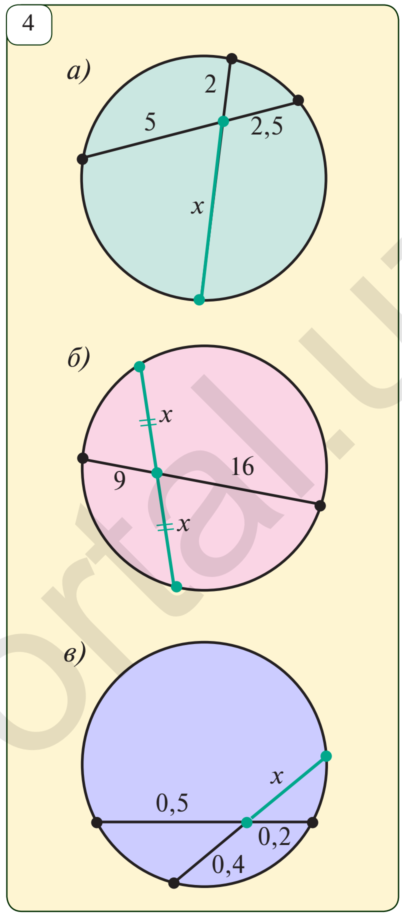
52.5. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O. Докажите, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности, если $AO \cdot OB = BO \cdot OD$.

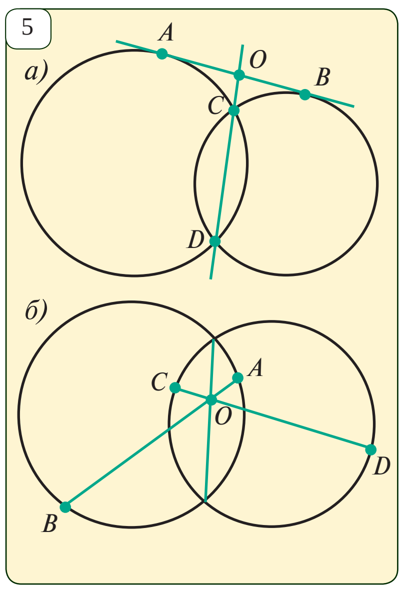
52.6. В круге радиуса 13 *дм* взята точка P, находящаяся от центра круга на расстоянии 5 *дм*. Через точку P проведена хорда AB длиной 25 *дм*. Найдите отрезки AP и PB.

52.7. Докажите, что на рис. 3 $AO \cdot OB = CO \cdot OD$, используя то, что треугольники AOD и BOC подобны.

52.8*. По данным на рис. 5 докажите, что $AO \cdot OB = CO \cdot OD$.

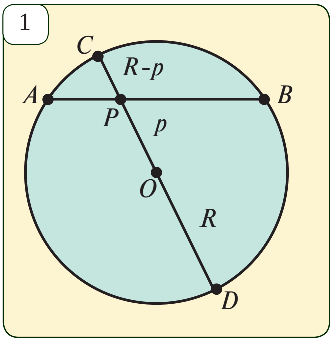
52.9*. Две окружности касаются друг друга в точке C. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй окружности в точке B. Докажите, что $\angle ACB = 90^\circ$.





53 ПРАКТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

На предыдущем уроке были доказаны свойства секущих и хорд окружности. Теперь познакомимся с некоторыми частными случаями.



Задача 1. Пусть точка P лежит во внутренней области окружности радиуса R на расстоянии p от ее центра. Тогда для произвольной хорды AB, проходящей через точку P, имеет место равенство

$$AP \cdot PB = R^2 - p^2 \quad (1)$$

Решение. Проведем через точку P диаметр CD. Тогда $PC = R - p$, $PD = R + p$ (*рис.* 1). По теореме о пересекающихся хордах,

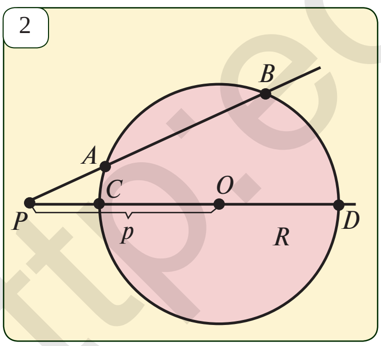
$$AP \cdot PB = CP \cdot PD = (R - p)(R + p) = R^2 - p^2.$$

Равенство (1) доказано.

Задача 2. На расстоянии 4 *см* от центра O окружности с радиусом 6 *см* отмечена точка P. Через точку P проведена хорда AB. Найдите отрезок PB, если AP = 2 *см*.

Решение. По условию задачи $R = 6$ *см*, $d = 4$ *см*, $AP = 2$ *см*. В таком случае из равенства (1) следует, что $2 \cdot PB = 6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20$. Отсюда, $PB = 10$ *см*.

Ответ: $PB = 10$ *см*.



Задача 3. Пусть точка P лежит во внешней области окружности радиуса R на расстоянии p от ее центра. Тогда для произвольной секущей, проходящей через точку P и пересекающей окружность в точках A и B имеет место равенство

$$PA \cdot PB = p^2 - R^2 \quad (2)$$

Решение. Пусть секущая PO, проходящая через центр O, пересекает окружность в точках C и D (*рис.* 2). Тогда по условию $PC = p - R$, $PD = p + R$. По теореме о секущих, исходящих из точки, внешней по отношению к окружности,

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = (p - R)(p + R) = p^2 - R^2.$$

Таким образом, равенство (2) доказано.

Задача 4. Прямая, проходящая через точку P, расположенную в 13 *см* от центра окружности с радиусом 7 *см*, пересекает окружность в точках A и B. Найдите хорду AB, если $PA=10$ *см*.

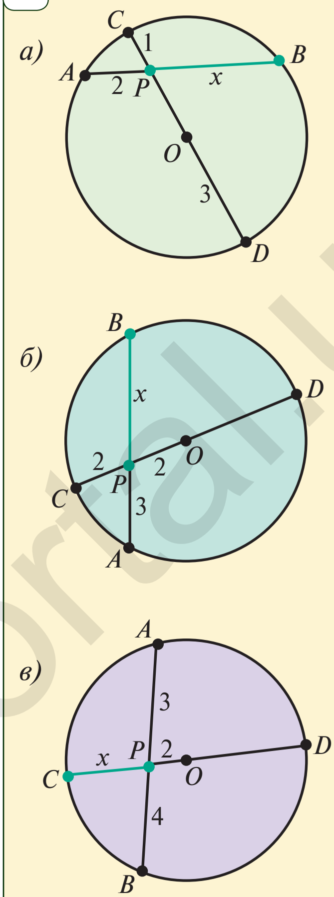
Решение. По условию $R=7$ *см*, $p=13$ *см*. Тогда по формуле (2)

$$PA\cdot PB=p^2-R^2=13^2-7^2=169-49=120.$$

Отсюда, $PB=\dfrac{120}{PA}=\dfrac{120}{10}=12$ (*см*). Значит,

$AB=PB-PA=12-10=2$ (*см*). *Ответ:* 2 *см*.

3



Задачи и задания

53.1. На расстоянии 3 *см* от центра окружности радиуса 5 *см* отмечена точка P. Хорда AB проходит через точку P. Найдите длину хорды AB, если $PA=2$ *см*.

53.2. На расстоянии 7 *м* от центра окружности радиуса 5 *м* отмечена точка P. Прямая, проходящая через точку P, пересекает окружность в точках A и B. Найдите длину хорды AB, если $PA=4$ *м*.

53.3. По данным рис. 3 найдите отрезок, обозначенный через x (O — центр окружности).

53.4. По данным на рис. 4 решите задачу. В ней,

а) $PC=5$ *дм*, $OD=7$ *дм*, $AB=2$ *дм*, $PA=?$

б) $PA=5$ *дм*, $AB=4$ *дм*, $PC=3$ *дм*, $OD=?$

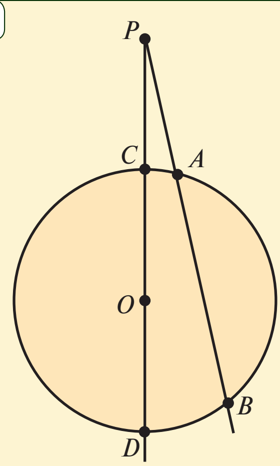
53.5. Хорды $AB=7$ *см* и $CD=5$ *см* пересекаются в точке P. Найдите, в каком отношении точка P делит хорду AB, если $CP:PD=2:3$.

53.6. Из точки C окружности на ее диаметр AB опущен перпендикуляр CD. Найдите отрезок CD, если $AD=2$ *см*, $DB=18$ *см*.

53.7*. Диагонали четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке K. Найдите отрезок AD, если $AB=2$, $BC=1$, $CD=3$ и $CK:KA=1:2$.

53.8*. В четырехугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, $AB:DC=1:2$ и $BD:AC=2:3$. Найдите отношение $DA:BC$.

4



54 ПРОВЕРЬТЕ СВОИ ЗНАНИЯ

I. Тесты

1. Укажите неверное утверждение, относящееся к высоте прямоугольного треугольника, опущенной на гипотенузу:
A) Меньше катетов;
B) Разбивает треугольник на два подобных треугольника;
C) Среднее пропорциональное проекций катетов на гипотенузу;
D) Равна половине гипотенузы.
2. Хорды AB и CD пересекаются в точке O. Найдите неверное утверждение:
A) $\angle DAB = \angle DCB$; B) ΔAOD и ΔCOB подобны;
C) $AO \cdot OB = CO \cdot OD$; D) $AO = CO$.
3. Найдите верное утверждение:
A) Проекции равных отрезков равны;
B) Проекция большего отрезка больше;
C) Проекции равных отрезков на прямой равны;
D) Длина проекции равна длине проецируемого отрезка.
4. В прямоугольном треугольнике высота, опущенная на гипотенузу, делит его на два треугольника. Эти треугольники ...
A) равны; B) равновелики; C) подобны; D) равнобедренные.
5. Среднее пропорциональное отрезков a и b равно:
A) $a + b$; B) $\sqrt{ab}$; C) $\frac{a+b}{2}$; D) $a : b$.
6. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Найдите неверное утверждение:
A) $\Delta AOB \backsim \Delta COD$; B) $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$;
C) $AO \cdot OB = CO \cdot OD$; D) $AB \cdot CD = BC \cdot AD$.

II. Задачи.

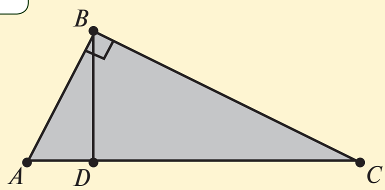
1. Катеты прямоугольного треугольника относятся как 3:4. Гипотенуза этого треугольника равна 50 *см*. Какими будут длины отрезков гипотенузы, на которые ее разбивает высота, опущенная из вершины прямого угла?
2. Хорды AB и CD пересекаются в точке E. Найдите ED, если $AE = 5$ *см*, $BE = 2$ *см* и $EC = 2{,}5$ *см*.
3. Точка K лежит на расстоянии 10 *м* от центра окружности радиуса 6 *м*. Из точки K к окружности проведена касательная. Найдите расстояние от точки касания P до точки K.
4. В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, а CD - высота, равная 4,8 *дм*. Найдите сторону AB, если $AD = 3{,}6$ *дм*.
5. Хорды AB и CD пересекаются в точке O. Найдите отрезок OD, если $AO = 6$, $OB = 4$ и $CO = 3$.

6. На окружности обозначены точки A, B, C, D. Лучи BA и CD пересекаются в точке O. Найдите хорду DC, если $OA=5$, $AB=4$, $OD=6$.
7. На прямой, касающейся окружности в точке B, выбрана точка A. Найдите радиус окружности, если $AB = 12$ и кратчайшее расстояние от точки A до окружности равно 8.
8. Перпендикуляр CD, опущенный из точки C окружности на диаметр AB, делит его на отрезки длиной 4 и 9. Найдите отрезок CD.
9. В прямоугольном треугольнике высота, опущенная на гипотенузу, делит ее на отрезки, равные 3 *дм* и 12 *дм*. Найдите площадь треугольника.
10. На хорде AB окружности с центром O и радиусом 5 *см* отмечена точка D. Найдите OD, если $AD=2$ *см*, $DB=4{,}5$ *см*.
11. Секущая окружности с центром в точке O и радиусом 5 *м* пересекает ее в точках A и B. На секущей отмечена точка P. Найдите расстояние OP, если $PA=5$ *м*, $AB=2{,}8$ *м*.
12. Даны четыре параллельные прямые, пересекающие стороны угла в точках A и A_1, B и B_1, C и C_1. Найдите отрезок A_1B_1, если $AB=8$, $CD=12$ и $C_1D_1=9$.
13. Вписанная окружность касается сторон угла. Найдите величину угла, если расстояние от его вершины до окружности равно радиусу.
14. Из концов диаметра AB проведена к окружности касательная BC и секущая AC, которая пересекается с окружностью в точке D. Найдите угол CBD, если $AD=DC$.
15. Катеты прямоугольного треугольника относятся как 2:3. Высота, опущенная на гипотенузу, разбивает его на два треугольника. Найдите отношение их площадей.

III. Проверьте себя (образец контрольной работы)

1. Касательная проведена к окружности из некоторой точки вне ее. Кратчайшее расстояние от этой точки до окружности равно 2 *см*, а до точки касания — 6 *см*. Найдите радиус окружности.
2. Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ΔABC, если $AD=9$ *дм*, $DC=16$ *дм* (*рис.* 1)

1



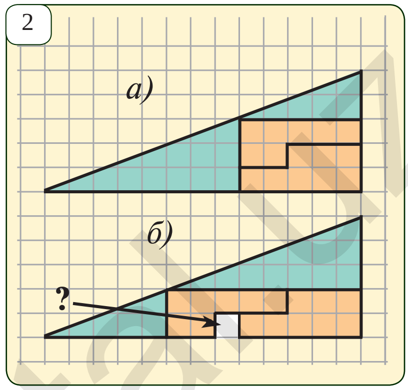
3. Из точки проведены две наклонные на прямую. Найдите длины наклонных, если их длины относятся как 1:2, а длины их проекций равны 1 *м* и 7 *м*.
4.* (Дополнительная задача). Даны отрезок PQ и отрезок ET, больший его. Постройте четырехугольник $ABCD$ такой,

что $AB=BC=PQ$; $BD=ET$ и имеет место равенство $AO \cdot OC=BO \cdot OD$, где O — точка пересечения диагоналей четырехугольника.

Занимательная задача

Треугольник на рис. 2.а, разбили на четыре части и снова его собрали, как показано на рис. 2.б. Откуда появился лишний квадратик?

2

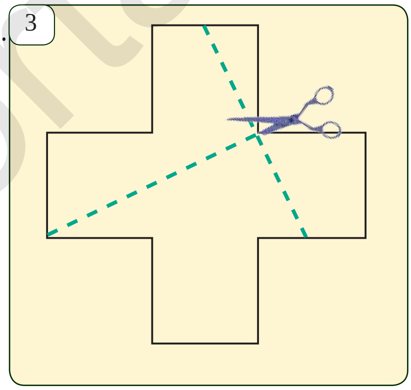


Греческий крест

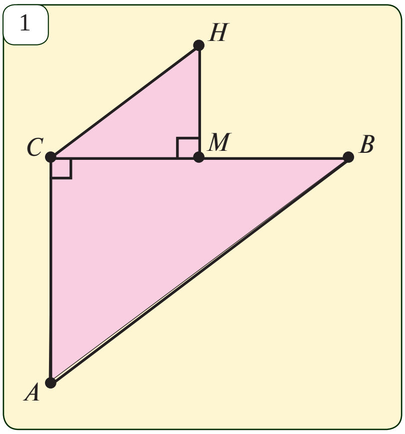
Эта фигура, уже известная за 500 лет до н. э., изображалась на хлебе как символ жизни.

Начертите эту фигуру на картоне и разрежьте на части так, как показано на рисунке. Убедитесь, что из полученных частей можно составить квадрат.

3



ИТОГОВАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА



I. Образец контрольной работы

1. В параллелограмме $ABCD$ $\angle A=45^\circ$, $AD=4$. Из вершины B на продолжении стороны AB параллелограмма отложен отрезок BP так, что $\angle PDA=90^\circ$. Отрезки BC и PD пересекаются в точке T, при этом $PT:TD=3:1$.

а) докажите, что $\Delta BPT \backsim \Delta CDT$, найдите отношение площадей этих треугольников;

б) найдите площадь параллелограмма $ABCD$;

в) найдите длину отрезка, соединяющего середины отрезков AB и TD.

г) выразите вектор $\overline{AB}$ через векторы $\overline{CA}$ и $\overline{TB}$.

д) найдите синус угла CAD.

2. *(Дополнительная задача)* На рис.1 $BC\perp AC$, $MH\perp BC$, $2MC=BC$, $MH=0,5AC$. Докажите, что $AB||CH$.

II. Примерные тесты для итоговой контрольной работы

1. Пусть высота, опущенная из вершины прямого угла, делит гипотенузу на отрезки 6 *см* и 54 *см*. Найдите площадь этого треугольника:

A) 648 см^2; B) 324 см^2; C) 1080 см^2; D) 540 см^2.

2. Одна из секущих, проведенных из точки C, пересекает окружность в точках A и B, вторая — в точках D и E. Найдите длину отрезка DE, если $CA=18$ *см*, $CB=8$ *см*, $CD=8$ *см*:

A) 17 *см*; B) 1 *см*; C) 9 *см*; D) Правильный ответ не приведен.

3. Найдите угол между диагоналями четырехугольника $ABCD$, если $A(-5;2\sqrt{3})$, $B(-4;2)$, $C(-2;\sqrt{3})$, $D(0;2)$:

A) 30°; B) 60°; C) 90°; D) Правильный ответ не приведен.

4. Найдите стороны параллелограмма, если его диагонали равны 10 *см* и $8\sqrt{2}$ *см* и угол между ними 45°:

A) $\sqrt{17}$ *см* и $\sqrt{97}$ *см*; B) 5 *см* и 6 *см*;
C) $\sqrt{34}$ *см* и $\sqrt{63}$ *см*; D) Правильный ответ не приведен.

5. Найдите площадь правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиуса 8 *см*:

A) $48\sqrt{3}$ *см*^{2}; B) $192\sqrt{3}$ *см*^{2}; C) $96\sqrt{2}$; D) Правильный ответ не приведен.

6. Найдите радиус кругового сектора с центральным углом 140° и площадью $31,5\pi$ *см*^{2}:

A) 9 *см*; B) 18 *см*; C) 9π *см*; D) Правильный ответ не приведен.

7. Втреугольнике с основанием 15 *см* проведен отрезок, параллельный основанию. Найдите длину отрезка, если площадь полученной при этом трапеции составляет $\frac{3}{4}$ –ую часть от площади треугольника:

A) 6,5 *см*; B) 7 *см*; C) 7,5 *см*; D) 5 *см*.

8. Найдите площадь равнобедренного треугольника с боковой стороной $2\sqrt{39}$ *см*, если высота относится к основанию как 3:4:

A) 260 *см*^{2}; B) 245 *см*^{2}; C) 310 *см*^{2}; D) 72 *см*^{2}.

9. Найдите угол между векторами $\bar{a}(4;4\sqrt{3})$ и $\bar{b}(8\sqrt{3};8)$:

A) 45°; B) 90°; C) 30°; D) 60°.

10. Основания равнобокой трапеции равны 10 *см* и 16 *см*, боковая сторона 5 *см*. Найдите площадь трапеции:

A) 45 *см*^{2}; B) 50 *см*^{2}; C) 48 *см*^{2}; D) 52 *см*^{2}.

11. Пусть гипотенуза прямоугольного треугольника 13 *см*, один из катетов больше другого на 7 *см*. Найдите площадь треугольника:

A) 30 см^2; B) 25 см^2; C) 45 см^2; D) 40 см^2.

12. Одна из диагоналей ромба равна 6 *см*, сторона 5 *см*. Найдите плошадь ромба:

A) 24 см^2; B) 30 см^2; C) 29 см^2; D) 40 см^2.

13. Найдите длину окружности, вписанной в квадрат с диагональю $6\sqrt{2}$:

A) 10π; B) 8π; C) 9π; D) 6π.

14. Найдите площадь круга, описанного около квадрата со стороной $6\sqrt{2}$ *см*:

A) 9π *см*^{2}; B) 12π *см*^{2}; C) 15π *см*^{2}; D) 18π *см*^{2}.

15. Площадь параллелограмма с высотами 4 *см* и 6 *см* равна 36 *см*^{2}. Найдите его периметр:

A) 26 *см*; B) 30 *см*; C) 29 *см*; D) 36 *см*.

16. Стороны параллелограмма с периметром 30 *см* относятся как 2:3. Найдите его площадь, если острый угол параллелограмма равен 30°:

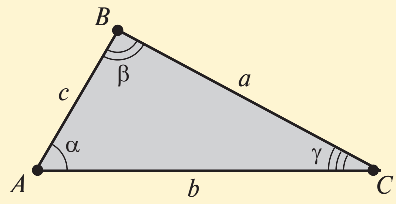
A) 26 см^2; B) 27 см^2; C) 29 см^2; D) 30 см^2.

17. Найдите угол A, если в треугольнике ABC стороны $AB=6\sqrt{3}$ *см*, BC=12 *см* и $\angle C$=60°:

A) 45°; B) 90°; C) 30°; D) 60°.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И СВЕДЕНИЯ ИЗ ПЛАНИМЕТРИИ

1 ТРЕУГОЛЬНИКИ



1°. Основные понятия

Пусть на плоскости даны три точки, не лежащие на одной прямой. Соединим каждые две из них отрезками. Полученная фигура называется треугольником. Точки называются вершинами, отрезки — сторонами треугольника. Обозначения: A, B, C — вершины, a, b, c — стороны (*рис.* 1).

Треугольник имеет три угла: $\angle BAC$, $\angle CBA$, $\angle ACB$. Обозначения: α , β, γ.

Медиана — отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей ей стороны. В треугольнике существуют три медианы, они обозначаются как m_a, m_b, m_c.

Биссектриса — отрезок, соединяющий вершину треугольника с противолежащей ей стороной и лежащий на биссектрисе угла при вершине. В треугольнике существуют три биссектрисы, они обозначаются как l_a, l_b, l_c.

Высота — перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на противолежащую ей сторону. В треугольнике три высоты, они обозначаются как h_a, h_b, h_c.

Средняя линия — отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника. В треугольнике три средние линии.

Периметр — сумма длин всех трех сторон треугольника. Обозначение P.

В зависимости от длин сторон треугольники делятся на три вида:

а) равносторонние ($a=b=c$); б) равнобедренные (какие-то две из сторон a,b,c равны); в) разносторонние (никакие две из сторон a,b,c не равны).

Окружность, касающаяся всех трех сторон треугольника, называется *окружностью, вписанной в треугольник* (такая окружность существует и единственна). Радиус вписанной окружности обозначается через r.

Окружность, проходящая через все три вершины треугольника, называется *окружностью, описанной около треугольника* (такая окружность существует и единственна). Радиус описанной окружности обозначается через R.

2°. Основные соотношения

1) $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$. Сумма внутренних углов треугольника равна 180°.

2) Все три медианы треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка делит медианы в отношении 2:1, считая от вершины. Медиана разбивает треугольник на два равновеликих треугольника. Длины медиан вычисляются по формулам

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2};\quad m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2};\quad m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}.$$

3) Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка является центром вписанной окружности. Биссектриса угла при вершине треугольника делит противолежащую ему сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам (*рис.* 2).

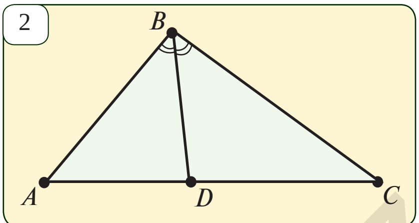
Если BD биссектриса, то $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{BC}{DC}$.

Длины биссектрис вычисляются по формулам:

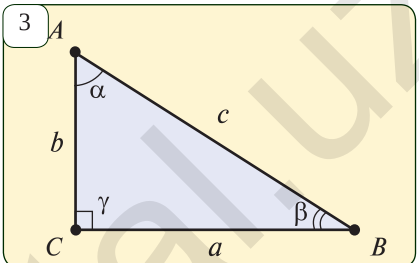
$$l_a=\frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)};\quad l_b=\frac{2\sqrt{ac}}{a+c}\sqrt{p(p-b)};$$

$$l_c=\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{p(p-c)},\qquad p=(a+b+c)$$

2



3



4) Высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке. Длины высот вычисляется по формулам

$$h_a=\frac{2S}{a};\qquad h_b=\frac{2S}{b};\qquad h_c=\frac{2S}{c}$$

где S — площадь треугольника.

5) Серединные перпендикуляры сторон треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка является *центром описанной около треугольника окружности*.

6) *Средняя линия* треугольника параллельна его третьей стороне и равна ее половине.

7) Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R.$$

8) Теорема косинусов:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha,\quad b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta,\quad c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

9. Формулы для вычисления площади треугольника:

$$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c;\qquad S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}ac\sin\beta;$$

10. Формула Герона:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\qquad p=\frac{a+b+c}{2};\qquad S=\frac{abc}{4R},\qquad S=pr.$$

3°. Важные частные случаи

а) *Прямоугольный треугольник* (*рис.*3).

$\angle\gamma=90°$, $\alpha+\beta=90°$, AC и BC — катеты, AB — гипотенуза. Теорема Пифагора: $a^2+b^2=c^2$.

$$S=\frac{1}{2}ab;\qquad R=\frac{c}{2};\qquad r=\frac{a+b+c}{2};$$

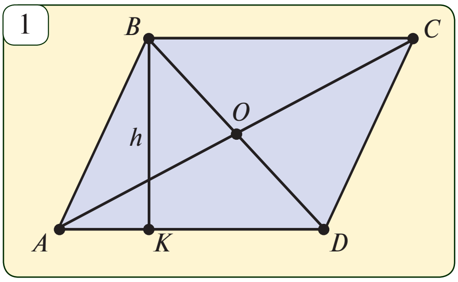
$$\frac{a}{c}=\sin\alpha;\qquad \frac{a}{c}=\cos\beta;\qquad \frac{b}{c}=\sin\beta;\qquad \frac{b}{c}=\cos\alpha.$$

$$\frac{a}{b}=\mathrm{tg}\alpha;\qquad \frac{a}{b}=\mathrm{ctg}\beta;\qquad \frac{b}{a}=\mathrm{ctg}\alpha;\qquad \frac{b}{a}=\mathrm{tg}\beta.$$

б) *Равносторонний треугольник*

$$\alpha=\beta=\gamma=60°,\qquad S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4},\qquad r=\frac{a\sqrt{3}}{6},\qquad R=\frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ



1°. Параллелограмм

Четырехугольник, стороны которого попарно параллельны, называется параллелограммом (*рис.* 1).

Отрезок, соединяющий противоположные вершины, называется *диагональю*.

AB и CD; AD и BC - параллельные стороны; BD и AC диагонали.

Основные свойства и соотношения

1) Точка пересечения диагоналей является центром симметрии параллелограмма.

2) Противолежащие стороны параллелограмма равны:

$$AB = CD \quad \text{и} \quad AD = BC.$$

3) Противоположные утлы параллелограмма равны:

$$\angle BAD = \angle BCD \quad \text{и} \quad \angle ABC = \angle ADC.$$

4) Сумма соседних углов равна 180°.

5) Диагонали, пересекаясь, в точке пересечения делятся пополам: $BO = OD$ и $AO = OC$.

6) Сумма квадратов сторон равна сумме квадратов диагоналей:

$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$ или $2(AB^2 + BC^2) = AC^2 + BD^2$.

7) Площадь параллелограмма: а) $S = ah_a$, где $a = AD$ сторона, $h_a = BK$ — высота; б) $S = ab\sin\alpha$, где $b = AB$ — сторона, $\alpha = \angle BAD$ — угол между сторонами AB и AD.

2°. Ромб

Параллелограмм, все стороны которого равны, называется *ромбом*. Ромб обладает всеми признаками параллелограмма.

Дополнительные свойства ромба.

1) Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

2) Диагонали ромба являются биссектрисами его внутренних углов.

3) Площадь ромба $S = \frac{1}{2}d_1 d_2$, где d_1, d_2 — диагонали ромба.

3°. Прямоугольник

Параллелограмм, все углы которого равны 90°, называется *прямоугольником*.

1) Диагонали прямоугольника равны.

2) Площадь прямоугольника $S = ab$, где a и b — смежные стороны прямоугольника.

4°. Квадрат

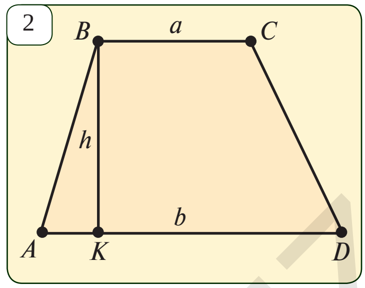
Прямоугольник, все стороны которого равны, называется *квадратом*. Квадрат обладает свойствами ромба и прямоугольника.

Если a — сторона квадрата, d его диагональ, то $S = a^2$; $S = \frac{d^2}{2}$; $d = a\sqrt{2}$.

5°. Трапеция

Четырехугольник, две стороны которого, называемые основаниями, параллельны, а две другие, называемые боковыми сторонами, не параллельны, называется *трапецией*.

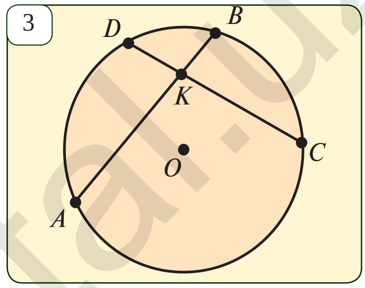
Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называется *средней линией*.



Основные свойства

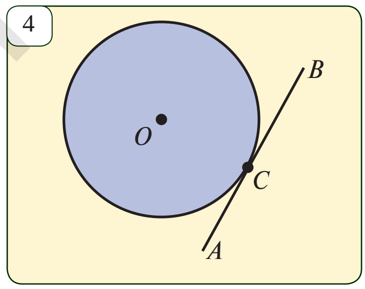
1) Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

2) Площадь трапеции $S=\frac{a+b}{2}\cdot h$, где a и b — основания, h — высота (*рис* 2).



ОКРУЖНОСТЬ, КРУГ

1°. Пусть даны положительное число R и точка O плоскости. Фигура, состоящая из всех точек, находящихся на расстоянии R от точки O, называется *окружностью*. Точка O — *центр окружности*, отрезок, соединяющий центр с точкой на окружности, называется *радиусом*, R называется *длиной радиуса*. Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется *хордой*. Хорда, проходящая через центр, называется *диаметром*.



Конечная часть плоскости, ограниченная окружностью, называется *кругом*.

Основные соотношения

1) $D=2R$, где D — длина диаметра.

2) $l=2\pi R$ — длина окружности.

3) $S=\pi R^2$ — площадь круга.

4) Если хорды AB и CD пересекаются в точке K (*рис.* 3), то $AK\cdot KB=CK\cdot KD$.

5) Диаметр, делящий хорду пополам, перпендикулярен этой хорде.

6) Равные хорды расположены на равных расстояниях от центра и, обратно, хорды, расположенные на равных расстояниях от центра, равны.

2°. Касательная

Прямая, имеющая с окружностью (или кругом) единственную общую точку, называется *касательной*. Их общая точка называется *точкой касания* (*рис.* 4).

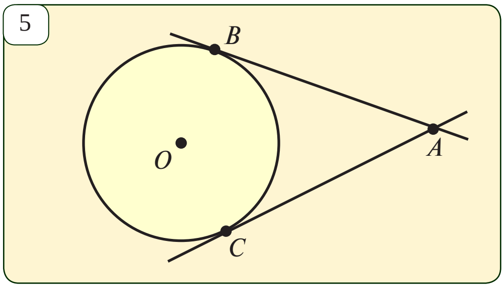
Прямая, имеющая с окружностью две общие точки, называется *секущей*.

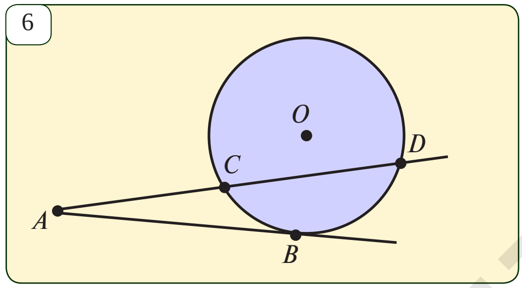
Свойства касательной

1) Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной.

2) Из точки, внешней по отношению к окружности, можно провести к окружности две касательные. Отрезки касательных равны (*рис.* 5): $AB=AC$.

3) Если AC — секущая, C и D — точки ее пересечения с окружностью, а AB — касательная, то имеет место равенство $AB^2=AD\cdot AC$ (*рис.* 6).



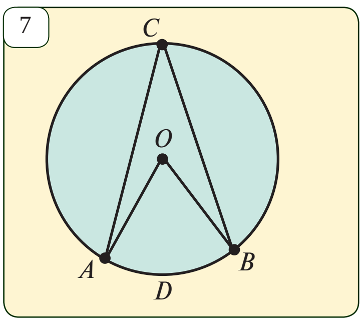


3°. Центральные углы и углы, вписанные в окружность

Двумя различными точками окружность разбивается на две части. Эти части называются дугами. Обозначение: ADB; ACB.

Угол AOB который опирается на дугу ADB – *центральный угол* (*рис.* 7), а угол ACB также опирающийся на дугу ADB, называется *вписанным углом*. Эти углы связаны соотношением:

$$\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB.$$



В частности, вписанный угол, опирающийся на полуокружность, будет прямым углом (*рис.* 6). Два вписанных угла, опирающихся на одну и ту же дугу, равны.

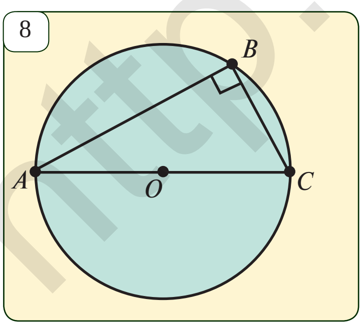
4°. Сектор и сегмент

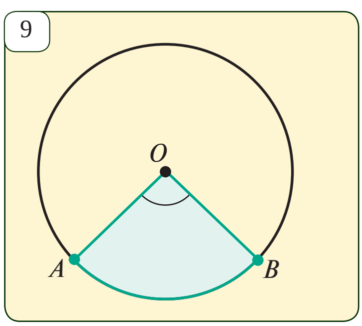
Часть круга, ограниченная двумя радиусами, называется (круговым) *сектором* (*рис.* 9). Длина дуги сектора:

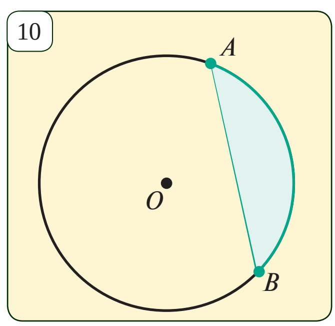
$l = \frac{\pi R\alpha}{180^\circ}$, где α — градусная мера центрального угла.

Площадь сектора: $S = \frac{\pi R^2\alpha}{360^\circ}$; $S = \frac{1}{2} Rl$.

Сегмент (круга) — часть круга, ограниченная хордой и дугой, на которую опирается эта хорда (*рис.* 10).







Площадь сегмента: $S = S_{сектор} \pm S_{\Delta} = \frac{\pi R^2}{360^\circ}\cdot\alpha \pm \frac{1}{2}R^2\sin\alpha$

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

Если сторона n-угольника a_n, периметр P_n, площадь S_n, радиус вписанной окружности r_n, радиус описанной окружности R_n, внутренний угол α_n, то,

$$P_n=na_n, \qquad S_n=\frac{1}{2}P_nr_n=\frac{1}{2}na_nr_n, \qquad \alpha_n=\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$$

$$R_n=\frac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}, \qquad r_n=\frac{a_n}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}.$$

Многоугольники, описанные около окружности и вписанные в окружность (*рис.* 11).

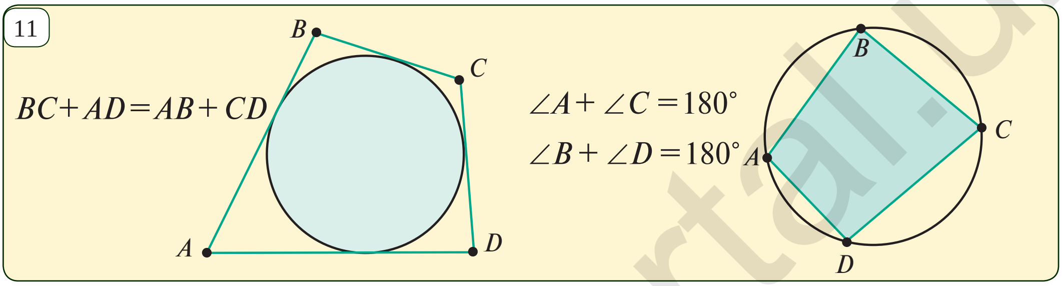


Таблица квадратов чисел от 10 до 99

десятки / *единицы*	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	100	400	900	1600	2500	3600	4900	6400	8100
1	121	441	961	1681	2601	3721	5041	6561	8281
2	144	484	1024	1764	2704	3844	5184	6724	8464
3	169	529	1089	1849	2809	3969	5329	6889	8649
4	196	576	1156	1936	2916	4036	5476	7056	8836
5	225	625	1225	2025	3025	4225	5625	7225	9025
6	256	676	1296	2116	3136	4356	5776	7396	9216
7	289	729	1369	2209	3249	4489	5929	7569	9409
8	324	784	1444	2304	3364	4624	6084	7744	9604
9	361	841	1521	2401	3481	4761	6241	7921	9801

Таблица некоторых постоянных

$\pi\cong 3{,}1416$	$\sqrt{8}\cong 2{,}8284$
$\sqrt{2}\cong 1{,}4142$	$\sqrt{10}\cong 3{,}1623$
$\sqrt{3}\cong 1{,}7320$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\cong 0{,}7071$
$\sqrt{5}\cong 2{,}2360$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\cong 0{,}5774$
$\sqrt{6}\cong 2{,}4495$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cong 0{,}3183$
$\sqrt{7}\cong 2{,}6457$	

Таблица значений тригонометрических функций

α°	sinα	cosα	tgα	ctgα	α°	sinα	cosα	tgα	ctgα
1	0,0175	1,000	0,0175	57,3	**46**	0,719	0,695	1,036	0,966
2	0,0349	0,999	0,0349	28,6	**47**	0,731	0,682	1,072	0,933
3	0,0523	0,999	0,0524	19,1	**48**	0,743	0,669	1,111	0,900
4	0,0698	0,998	0,0699	14,3	**49**	0,755	0,656	1,150	0,869
5	0,0872	0,996	0,0875	11,4	**50**	0,766	0,643	1,192	0,839
6	0,1045	0,995	0,1051	9,51	**51**	0,777	0,629	1,235	0,810
7	0,1219	0,993	0,1228	8,14	**52**	0,788	0,616	1,280	0,781
8	0,139	0,990	0,141	7,11	**53**	0,799	0,602	1,327	0,754
9	0,156	0,988	0,158	6,31	**54**	0,809	0,588	1,376	0,727
10	0,174	0,985	0,176	5,67	**55**	0,819	0,574	1,428	0,700
11	0,191	0,982	0,194	5,145	**56**	0,829	0,559	1,483	0,675
12	0,208	0,978	0,213	4,507	**57**	0,839	0,545	1,540	0,649
13	0,225	0,974	0,231	4,331	**58**	0,848	0,530	1,600	0,625
14	0,242	0,970	0,249	4,011	**59**	0,857	0,515	1,664	0,601
15	0,259	0,966	0,268	3,732	**60**	0,866	0,500	1,732	0,577
16	0,276	0,961	0,287	3,487	**61**	0,875	0,485	1,804	0,554
17	0,292	0,956	0,306	3,271	**62**	0,883	0,469	1,881	0,532
18	0,309	0,951	0,325	3,078	**63**	0,891	0,454	1,963	0,510
19	0326	0,946	0,344	2,904	**64**	0,899	0,438	2,050	0,488
20	0,342	0,940	0,364	2,747	**65**	0,906	0,423	2,145	0,466
21	0,358	0,934	0,384	2,605	**66**	0,914	0,405	2,246	0,445
22	0,375	0,927	0,404	2,475	**67**	0,921	0,391	2,356	0,424
23	0,391	0,921	0,424	2,356	**68**	0,927	0,375	2,475	0,404
24	0,405	0,914	0,445	2,246	**69**	0,934	0,358	2,605	0,384
25	0,423	0,906	0,466	2,145	**70**	0,940	0,342	2,747	0,364
26	0,438	0,899	0,488	2,050	**71**	0,946	0,326	2,904	0,344
27	0,454	0,891	0,510	1,963	**72**	0,951	0,309	3,078	0,325
28	0,469	0,883	0,532	1,881	**73**	0,956	0,292	3,271	0,306
29	0,485	0,875	0,554	1,804	**74**	0,961	0,276	3,487	0,287
30	0,500	0,866	0,577	1,732	**75**	0,966	0,259	3,732	0,268
31	0,515	0,857	0,601	1,664	**76**	0,970	0,242	4,011	0,249
32	0,530	0,848	0,625	1,600	**77**	0,974	0,225	4,331	0,231
33	0,545	0,839	0,649	1,540	**78**	0,978	0,208	4,507	0,213
34	0,559	0,829	0,675	1,483	**79**	0,982	0,191	5,145	0,194
35	0,574	0,819	0,700	1,428	**80**	0,985	0,174	5,67	0,176
36	0,588	0,809	0,727	1,376	**81**	0,988	0,156	6,31	0,158
37	0,602	0,799	0,754	1,327	**82**	0,990	0,139	7,11	0,141
38	0,616	0,788	0,781	1,280	**83**	0,993	0,1219	8,14	0,1228
39	0,629	0,777	0,810	1,235	**84**	0,995	0,1045	9,51	0,1051
40	0,643	0,766	0,839	1,192	**85**	0,996	0,0872	11,4	0,0875
41	0,656	0,755	0,869	1,150	**86**	0,998	0,0698	14,3	0,0699
42	0,669	0,743	0,900	1,111	**87**	0,999	0,0523	19,1	0,0524
43	0,682	0,731	0,933	1,072	**88**	0,999	0,0349	28,6	0,0349
44	0,695	0,719	0,966	1,036	**89**	1,000	0,0175	57,3	0,0175
45	0,707	0,707	1,000	1,000	**90**	1,000	0,0000	-	0,0000

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

Урок 1. **5.** 50°; 130°; 133°; 97°. **6.** 65°; 70°; 45°. **7.** 105°; 130°; 125°. **8.** 35°; 35°; 110°. **9.** 94°; 56°; 30°. **10.** 110°; 130°; 120°. **11.** *Указание*: стороны каждой из четырёхтре-угольников равны половине соответствующихсторон первоначального треугольника **12.** *Указание*: отрезок *DE* является средней линией и треугольника *ABH* и треугольника *CEB.* **13.** *Указание*: воспользуйтесь равенством углов треугольников *ANC* и *CKA*, а также равенством внутренних накрест лежащих углов.

Урок 2. **2.** а) $\sqrt{34}$ yoki $\approx 5{,}8$ *см*; б)14 $\sqrt{2}$ *м*; в) $\approx 21{,}5$ *см; г)* $\frac{\sqrt{5}}{2}$*см; д)* $\sqrt{2}$ *см; е)* $\sqrt{13}$ *см.* **4.** а) $\sqrt{21}$ *см*, $\sqrt{5}$ *см;* б) $\sqrt{21}$ *см*, $\sqrt{22}$ *см;* в) $\sqrt{2}$ *см*, $\sqrt{3}$ *см.* **5.** 12 *см.* **6.** а) $\sqrt{10}$ *см;* б) $2\sqrt{5}$ *см*; в) $\sqrt{33}$ *м.* **8.** б), г), д) **9.** все. **10.** 225. **11.** 5 *см.* **12.** $\sqrt{27}$ *м.* **14.** б) $\approx 4{,}3$ *м;* в). $\approx 2{,}23$. **15.** а) 8,62 *м*; б) $\approx 5{,}97$ *м.* **16.** $\approx 1{,}84$ $м^2$. **17.** $\approx 105{,}6$ *м.* **18.** $\approx 102{,}5$ км. **19.** $\approx 48{,}4$ км.

Урок 3. **1.** а) 11,7 *м*; б) 35 *мм*; в) 6,2 *км*; г) 172 *см*; д) $4(x\text{-}1)$ *см*; е) $(4x+2)$ *м*; ж) $(13x+2)$ *км*; з) $(6y\text{-}8)$ *см*; *и)* $8x$ *км* . **2.** а).$\approx 7{,}967$ *см*; б) $\approx 44{,}329$ *м*; в) $\approx 409{,}86$ *мм.* **3.** а) Да; б) Нет; в) Да; г) Да. **4.** 0,8 *м*; 24,64 $м^2$; 21,12 $м^2$. **5.** ≈ 50 раз. **7.** 17,5 *см*; 10,5 *см*; 38,1 *см*; 59,1 *см.* **8.** 91,5 *м.*

Урок 4. **1.** *с.* **2.** а) *C*; б) *A* ; **3.** 8 шт, 2,4м. **5.** $\approx 53{,}4$ *м.* **6.** $\approx 19{,}25$ $м^2$. **9.** 12 **10.** В первом. **11.** 80 шт. **12.** 7 $дм^2$. **14.** а)180 $дм^3$; б)105 $см^3$ в)1364 $см^3$. **15.** 1,8 $м^3$. **16.** а) 22 *см;* б) 20 *см и* 24 $см^2$*;* в) 96 $см^3$. **20.** а) $4\sqrt{2}$; б) $2\sqrt{21}$; в) $h = 2\sqrt{7}$. **21.** а) $(384+80\sqrt{5})$ $см^2$, 640 $см^3$; б) 84 $см^2$, 36 $см^3$. в) $(12\sqrt{34}+156)$$м^2$, 180 $м^3$. г) $36564+306\sqrt{97}$ $см^2$, 404838 $см^3$.

Урок 6. **2.** Треугольники подобны. **4.** 5; 8;$\frac{1}{2}$. **5.** 72; 162; 90.

Урок 7. **3.** 12 *м.* **4.** 7,5 *см*; 12,5 *см*; 15 *см.* **6.** 73,5 $м^2$; 37,5 $м^2$. **7.** Треугольники подобны.

Урок 8. **3.** а) 4,5; б) 10,5; в) 4,5. **4.** а) 10; б) 6; в) 4,5. **5.** а) 5 *см*, 3,5 *см*; б) $5\frac{5}{7}$*см*, $2\frac{2}{7}$*см.* **6.** а) 8; б) 3,5; в) 12,5. **8.** 12 *см.*

Урок 9. **3.** а) Да; б) Нет; в) Нет. **4.** $2\frac{1}{3}$*см*, 9. **5.** а) 15 *см*; 20 *см*; б) 24 *см*; 18 *см*; в) 144 $см^2$; 256 $см^2$.

Урок 10. **2.** Да. **3.** а) и б); в) и г). **4.** 108 $см^2$. **5.** 4 *см*; 6 *см.* **7.** 4,8 *см.* **9.** 12.

Урок 11. **1.** а) и в); б) и д); г) и е). **2.** 36 *м* или 20,25 *м.* **3.** 12 *см*; 14 *см.* **5.** $5\frac{5}{11}$*см.* **7.** 4 *м* . **8.**16 *м* **9.** 8,4 *м.*

Урок 12. **3.** а) 15; б) $3\frac{2}{11}$; в) $3\frac{5}{17}$. **4.** 18 *см*; 6 *см.* **5.** 29 $дм^2$. **6.** 6 *дм.* **7.** *м*:*n.* **10.** Да .

Урок 13. **1.** $3\frac{3}{17}$*м*; 13,6 *см.* **7.** *n*:*м.* **8.** а) *S*:4; б) *S*:2; в) *S*:4. **9.** 30. **10.** 57,75.

Урок 14. **II. 1.** 12 $см^2$. **2.** 8,4. **3.** 2,4. **4.** 24. **5.** 8. **6.** 1,6. **7.** 18 *мм.* **8.** а)4; б)10; в)32. **9.** Да. По 2-му признаку подобия треугольников. **10.** 16. **11.** Да , k=2. **12.** 24 *мм.* **13.** а) 36$см^2$*;* б) 54 $мм^2$. **14.** а) ; б) . **15.** а) 7; б) 7. **16.** 6*м.* **17.** 12 *м.*

Урок 15. **1.** а)(1;-1); б)(-2;3); в)(0;-4). **2.** (-1;5). **4.**(0;-3). **5.** (-1;-8). **6.** Да. **7.** Нет. **8.** BB_1.

Урок 16. **1.** а) При симметрии относительно оси *Ox*: (1;-2), (0;-2), (2;-2). б) При симметрии относительно оси *Oy*: (-1;2), (0;2), (-2;2). **2.** Относительно оси *Ox*. **4.** Соответственно 2, 4, 2, 1. **8.** ПОП, ПОТОП

Урок 17. **1.** (8;3). **3.** (2;-5), (-2;-2), (6;-12). **6.** Центр симметрии прямоугольника, квадрата, параллелограмма – в точке пересечения диагоналей, центр симметрии прямой - произвольной ее точке.

12. а) осевая симметрия (1).

б) центральная симметрия, осевая симметрия (4).

в) центральная симметрия.

г) осевая симметрия (5).

д) центральная симметрия, осевая симметрия (6)

13. а) осевая симметрия:

M, X, V, T, Y, V, W, D, B, H, K, C, I, E, A.

б) центральная симметрия: N, S, Z, X, H, I.

14. а) на 180°; б) Нет; в) Нет; г) на 90°; д) Нет; г) на 120°.

15. а) $\frac{360^\circ}{7}$; б) 60°; в) 360°. **17.** 15

Урок 18. **5.** 1 *км* 750 *м*. **8.** 7,2 *см*. **9.** $k=\frac{1}{2}$ или $k=2$.

Урок 19. **4.** $k=2$. **5.** 6 *см*²; 24 *см*². **6.** 104 *см*². **7.** В каждом из двух случаев $k=1$. **8.** 1,2 *м*². **9.** 16 *см*, 32 *см*.

Урок 20. **4.** $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{9}$. **5.** X_1X и Y_1Y – центры гомотетии в пересечении лучей. **6.** $OX_1=2\cdot OX$. **7.** *Указание:* Воспользуйтесь решением задачи из темы.

Урок 21. **4.** а) $P_2=42$; $k=\frac{1}{2}$; б) $S_1=12$, $k=2$; в) $P_1=150\sqrt{2}$, $k=\sqrt{2}$; г) $P_1=10$, $S_2=216$.

Урок 22. **1.** ≈6,94 *м*. **2.** 300 *м*. **3.** ≈72 *м*. **4.** 6,6 *м*.

Урок 23. **1.** 9. **2.** $P_2=39$ *дм*. **3.** 8 *м*. **4.** 24 *дм*². **6.** *Указание:* Постройте треугольник *ABC*, а затем, используя задачу 1 из темы о построении многоугольников, постройте треугольник со сторонами в 3 раза меньше.

9. 72°; 72°; 36°. **11.** 12 *см*². **12.** 150 000 000 *км*. **13.** а) Да; б) Да. **15.** 6 *см*, 12 *см*, 18 *см*. **16.** 84 *м*.

Урок 24. **II.** **1.** 8 *см*. **2.** $4\frac{4}{9}$ *см*. **3.** 48 *м*. **4.** 4 *см*; 0,5 *см*². **5.** $5\frac{1}{3}$ *м*. **6.** 867 *км*. **III.** **7.** 7,5 *м*. **8.** 6 *см*. **9.** а) 7,5 *см*; б) 6 *см*; в) 16,2 *см*. *Занимательные задачи:* **1.** Не меняется. **2.** а) Да; б) Нет. **3.** *Указание:* Измерьте с помощью линейки высоты каждой игрушки и найдите их отношения.

Урок 25. **1.** $\sin\alpha>0$, $\cos\alpha<0$, $\mathrm{tg}\alpha<0$, $\mathrm{ctg}\alpha<0$. **5.** а) 1; б) 1; в) 1. **6.** 3,5 *см*. . **7.** а) $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; б) $\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$; в) 0. **8*.** а) 30°; б) 135°; в) 150°.

Урок 26. **2.** 36 *см*². **3.** 24 *см*. **4.** а) $6\sqrt{3}$; б) 30; в) $\frac{105\sqrt{3}}{4}$. **5.** $(24+4\sqrt{3})$ *см*; $(24+8\sqrt{3})$

см^2. **6.** $10\sqrt{3}$ *см*. **7.** а) $\frac{\sqrt{3}}{6}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **8.** ≈807 *м*^{2}. **9.** ≈88 *м*.
10. 1000, 37°. **12.** 2°. **13.** 34°. **14.** $2\sqrt{3}$; $4\sqrt{3}$. **15.** R = $3\sqrt{3}$ *см; BO* = $6\sqrt{3}$. **16.** 5 *см*. **17.** 12, $24\sqrt{3}$. **18.** 20 *см,* 200 см^2. **19.** 4, $16\sqrt{3}$. **20.** 30°; 60°. **22.** 12 *см*; $4\sqrt{3}$ *см*; $8\sqrt{3}$ *см*. **23.** 32 *см*^{2}.

Урок 27. **2.** а) 6 *см*^{2}; б) 73,5 *см*^{2}; в) 6 *см*^{2}. **3.** 36 *см*^{2}. **4.** $49\sqrt{2}$ *см*^{2}. **5.** $54\sqrt{3}$ *см*^{2}. **6.** $2\frac{2}{3}$ *см*; $4{,}5\sqrt{2}$ *см*. **7.** $S = \frac{h_b \cdot h_c}{2\sin\alpha}$ **8.** $4{,}8\sqrt{3}$ *см*.

Урок 28. **2.** а) $BC=6$; б) $AB=8\sqrt{2}$; в) $AC=7\sqrt{2}$. **3.** а) $\sin C=\frac{1}{3}$; б) $\sin A=\frac{7}{16}$; в) $\sin B=\frac{2}{3}$. **4.** 4,8 *дм*. **5.** 30° или 150°. **6.** Можно. **7.** AB≈21,1 *м*; $\angle B$≈37°, $\angle C$≈76°. **8.** 76°; 26,1 *см*; 23,8 *см*.

Урок 29. **2.** а) $\sqrt{13}$ *см*; б) 4 *м*; в) $\sqrt{283}$ *дм*. **3.** $\frac{1}{5}$; $\frac{19}{35}$; $\frac{5}{7}$. **4.** $2\sqrt{13}$ *см* или $2\sqrt{109}$ *см*. **5.** $\sqrt{31}$ *см*, $\sqrt{91}$ *см*. **6.** $\sqrt{109}$ *см*, $\sqrt{39}$ *см*.
7. *Указание:* Применив теорему косинусов к треугольникам ADS и SDC, найдите a^2 и c^2, а затем сложите почленно эти равенства **8.** $\frac{\sqrt{106}}{2}$ *см*; $\frac{\sqrt{151}}{2}$ *см;* $\frac{\sqrt{190}}{2}$ *см*.

Урок 30. **1.** $\angle B$ и $\angle C$. **2.** AB и BC. **3.** а) остроугольный; б) прямоугольный; в) тупоугольный. **4.** а) $8\frac{1}{8}$; б) $8\frac{1}{8}$; в) $24\frac{1}{6}$; г) $\frac{35\sqrt{6}}{24}$. **6.** *Указание:* Воспользуйтесь теоремой синусов. **7.** *Указание:* решается аналогично задаче 6. **8.** *Указание:* Воспользуйтесь теоремой синусов.

Урок 31. **1.** а) $10\sqrt{3}$; б) $28\sqrt{2}$; в) 12; г) ≈0,3064. **2.** а) –2; б) 0; в) 2. **3.** а) 8; б) 24; в) 8; г) 0. **5.** а) –7,5; в) 0. **6.** $a \perp b$, $c \perp d$.

Урок 32. **1.** а) $\alpha=90°$, $c=\frac{5\sqrt{2}}{2}$. б) γ≈45°; a≈27,3, b≈24,5; в) α=20°; b≈65.8; c≈88,6; г) γ=119°; a≈8,1; b≈5,8. **2.** а) c≈5,29; α≈79°6′; β≈138°21′; б) c≈53,09; α≈11°39′; β≈38°21′; в) a≈19,9; β≈58°19′; γ≈936°41′; г) a≈22,9; β≈21°; γ≈15°. **3.** а) α≈29°; β≈47°; γ≈104°; б) α≈54°; β≈13°; γ≈113°; в) α≈34°; β≈44°; γ≈102°; г) α≈39°; β≈93°; γ≈48°.

Урок 33. **1.** а) $2\sqrt{3}$ *см*; б) 16 *см*; в) $\frac{ab\sqrt{2}}{4}$. **2.** $4\sqrt{2}$ *м*; 8 *м* и $4+4\sqrt{3}$ *м*. **3.** $50\sqrt{3}$ *кг*. **4.** 14 *см*. **5.** $2\sqrt{14}$ *см*. **6.** $6\sqrt{3}$ *см*. **7.** 50 *см*.

Урок 34. **1.** ≈10,8 *м*. **2.** ≈15 *м*. **3.** ≈43,4 *м*. **4.** ≈35°. **5.** ≈73,2 *м*. **6.** ≈49 *м*. **7.** По асфальтовой дороге.

Урок 35. **II. 1.** $3\sqrt{6}$, $3\sqrt{2}$. **2.** $\frac{111}{120}$; 0,89; –0,65. **3.** $2\sqrt{7}$ *см*; $\frac{2\sqrt{21}}{3}$ *см*. **4.** $30\frac{1}{30}$ *см*. **5.** 28 *см*. **6.** 8 *см*^{2}; $(4+4\sqrt{5})$ *см*; $h_a=4$ *см*, $h_b=0{,}8\sqrt{5}$ *см*. **7.** $2\sqrt{13}$. **8.** а) остроугольный; б) прямоугольный, в) тупоугольный. **9.** 63 *см*^{2}. **10.** ≈3,7 *см*. **11.** 7 *см*. **12.** 6. **13.** 0. **14.** –9. **15.** 135°. **16.** OC≈9,6. **17.** $(24+24\sqrt{3})$ *см*. **18.** 5. **III. 1.** ≈109°. **2.** γ=100°, a≈3,25; c≈6,43. **3.** 6,25; 14,76.

Урок 36. **2.** а) Произвольный треугольник можно вписать в окружность; б) четырехугольники, сумма противоположных углов которых равна 180°. **3.** Углы, опирающиеся на одну дугу, равны. **4.** 10 *см*. **5.** 672 *см*^{2}. **6.** а) $10\sqrt{3}$ *см*; б) $10\sqrt{2}$ *см*; в) $10\sqrt{2}$ *см*; $10\sqrt{2}$ *см*; 20 *см*. **7.** $8\frac{1}{3}$ *см*. **8.** в ΔABF, $\angle BAF+\angle AFB=90°$, $\angle ABF=90°$. Значит, AF – диаметр. **9.** Сумма противоположных углов равна 180°, значит, можно описать окружность. **10.** *Указание:* Точка пересечения одного из оснований и серединного перпендикуляра к одной из боковых сторон − центр окружности.

Урок 37. **2.** 7,2 *см*. **3.** а) 16,6; б) 22; в) 22,6. **4.** а) 2,5; б) 3,5; в) 2. **8.** 6 *см*.

Урок 38. **3.** а) 60°; б) 108°; в) 120°; г) 144°; д) 160°. **4.** а) 120°; б) 72°; в) 120°; г) 36°; д) 30°. **5.** а) 3; б) 4; в) 8; г) 12.

Урок 39. **1.** 3 *см* и $3\sqrt{2}$ *см*. **2.** $\sqrt{3}$ и $2\sqrt{3}$. **7.** а) 6; б) 12; в) 10; г) 20; д) 5.

Урок 40. **3.** 8 *см*; $8\sqrt{2}$ *см*; $8\sqrt{3}$ *см*; $8\sqrt{2+\sqrt{3}}$ *см*; 16 *см*.

4. $\frac{8\sqrt{6}}{3}$ *см*; **5.** а) $20\sqrt{2}$ *см*; б) 40 *см*. **6.** $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ *см*.

Урок 41. **I.** **1.** D; **2.** C; **3.** C; **4.** B; **5.** B; **6.** D; **7.** D. **III.** **1.** $\sqrt{3}$:4: $6\sqrt{3}$. **2.** 3:4. **3.** а) ≈5,780 *см*; б) ≈4,142 *см*; в) ≈2,679 *см*. **4.** $S=\sqrt{2}R^2$. **5.** 24 *см*^{2}. **IV.** **1.** 4 *см*; 13 *см*. **2.** а) 80 *см*; б) $20\sqrt{2}$-$\sqrt{3}$ *см*; $40\sqrt{2}$-$\sqrt{3}$ *см*; в) 200 *см*^{2}. **3.** $4\sqrt{3}$ *см*; 8 *см*. 4. $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ *см*^{2}.

Урок 42. **2.** а) Увеличится в 3 раза; б) увеличится на 6π *см*; в) уменьшится в 3 раза; г) уменьшится на 6π *см*. **3.** 6369 *км*. **4.** а) $\frac{2\pi\sqrt{3a}}{3}$; б) $\pi\sqrt{a^2+b^2}$; в) $\frac{2\pi b^2}{\sqrt{4b^2-a^2}}$. **5.** а) π*a*; б) $\pi c(\sqrt{2}-1)$; в) $\pi c(\sin\alpha+\cos\alpha-1)$. **6.** 1,5 *м*. **7.** в 66348 раза.

Урок 43. **1.** а) π *см*; б) 1,5π *см*; в) 3π *см*; г) 4π *см*. **2.** а) $\frac{2\pi}{9}$; б) $\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{5\pi}{12}$. **3.** а) ≈69°; б) 120°; в) 150°. **4.** а) $\frac{5\pi}{8}$ *см*; б) 2π *см;* в) $\frac{15\pi}{4}$ *см*; **5.** а) 4π; б) 16π. **7.** 2.

Урок 44. **3.** Увеличится в k^2 раз; б) уменьшится в k^2 раз. **4.** 6,25π *см*^{2}; 12,5π *см*^{2}. **5.** 2,25π *см*^{2}; 9π *см*^{2}. **6.** $(\pi-2)R^2$. **7.** 21,25 π *см*^{2}. **8.** 18,75 *см*^{2}.

Урок 45. **3.** а) $\frac{49}{12}\pi$ *см*^{2}; $\frac{49(\pi-3)}{12}$ *см*^{2}; б) 6,125π *см*^{2}; $\frac{49(\pi-2\sqrt{2})}{8}$ *см*^{2}; в) $\frac{49\pi}{3}$ *см*^{2}; $\frac{49(4\pi-3\sqrt{3})}{2}$ *см*^{2}; г) $\frac{49\pi}{4}$ *см*^{2}; $\frac{49(\pi-2)}{4}$ *см*^{2}. **4.** а) $a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{8}\right)$ б) $a^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$ в) $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{2}$ a^2; **5.** π *см*^{2}; 3π *см*^{2}; 5π *см*^{2}; 7π *см*^{2}. **6.** $\frac{25(2\pi-3\sqrt{3})}{3}$ *см*^{2}; $\frac{25(10\pi-3\sqrt{3})}{3}$ *см*^{2}; **7.** $\frac{75(4\pi-3\sqrt{3})}{2}$. *см*^{2}. **8.** $S_1<S<S_2$; 300 *см*^{2} < 314*см*^{2} < 321,48 *см*^{2}.

Урок 46. **1.** У круга больше **2.** $\frac{160}{3}\pi$ *см*^{2}. **3.** 5,76π *см*^{2}. **4.** 8.(π—2) *см*^{2}. **6.** 6π *см*^{2}; 10π *см*.

Урок 47. **II.** **1.** $6\sqrt{2+\sqrt{2}}$. **2.** $\frac{8\pi}{3}$ *дм*. **3.** 30 *см*. **4.** 90°. **5.** 3. **6.** π и 6,25π. **7.** $\frac{10\pi+3\sqrt{3}}{2\pi-3\sqrt{3}}$. **8.** $\frac{2\sqrt{3}}{\pi}$ **9.** $\frac{9\sqrt{3}-2\pi}{6}$ a^2. **10.** 1,5π. **11.** 7. **12.** ≈9π—26,04. **13.** π. **14.** $54\sqrt{3}$—24π. **15.** $\frac{3\pi}{8}$. **III.** **2.** $8\sqrt{3}$ *см*. **3.** а) $\frac{18}{\pi}$ *см*; б) $\frac{216}{\pi}$ *см*^{2}; в) $\frac{216\pi+81\sqrt{3})}{\pi^2}$ *см*^{2}.

Урок 48. **3.** $5\sqrt{2}$ *см*. **4.** 12 *см*. **5.** 44 *м*, 60 *м*. **7.** 1:7. **8.** $AB\cos\alpha$.

Урок 49. **1.** а) 30 *см*, 12 *см*; б) 9 *см*, 12 *см*, 21 *см*; в) 3 *см*, 15 *см*, 3 *см*, 21 *см*. **3.** 6 *см*; 10,5 *см*. **4.** 9 *см*, 12 *см*, 15 *см*, 18 *см*. **5.** 60°. **6.** 21 *см*. **7.** 20 *см*.

Урок 50. **1.** *Указание:* $\Delta ACD \backsim \Delta CBD \backsim \Delta ABC$. **2.** 25 *см*, 15 *см*, 20 *см*. **3.** $9\frac{3}{5}$ *см*.

4. а) 5, 4; б) 24, 25; в) 8,10. **5.** 16:25. **6.** 56,16 *см*^{2}. **7.** 60 *см*^{2}. **8.** $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{4}{9}$.

Урок 51. **2.** *Указание:* а) постройте прямоугольный треугольник с катетами *a* и *b*; б) постройте прямоугольный треугольник с гипотенузой *a* и катетом *b*. **3.** *Указание:* постройте прямоугольный треугольник ΔABC с катетами $AB=BC=1$. Затем постройте прямоугольный треугольник ΔBCC_1 с катетом $CC_1=1$ и $\angle C_1=90°$ и т.д. **4.** а) 20; б) 45; в) 37,5. **5.** 225π *см*^{2}. **6.** 180 *см*^{2}. **7.** 25:9. **9.** Так как $OC \geq OD$, то неравенство всегда верно.

Урок 52. **1.** а) 6,25; б) 12; в) 0,25. **2.** а) 8 *см*; б) 2,5 *см;* в) 0,9 *см*. **3.** а) 4 *дм*; б) 4 *дм*. **4.** 8 *см*. **6.** 9 *дм*; 16 *дм*.

Урок 53. **1.** 10 *см*. **2.** 2 *см*. **3.** а) 2,5; б) 4; в) 2. **4.** а) $4\sqrt{6}-1$ *см*; б) 6 *см*. **5.** 1:6. **6.** 6 *см*. **7.** 3. **8.** 1:4.

Урок 54. **II. 1.** 18 *см*; 32 *см*. **2.** 4 *см*; **3.** 8 *см*; **4.** 6,4 *дм*. **5.** 8 *см*. **6.** 1,5. **7.** 5. **8.** 6. **9.** 45 *дм*^{2}. **10.** 4 *см*. **11.** 8 *см*. **12.** 6. **13.** 60°. **14.** 45°. **15.** 4:9.

III. 1. 8 *см*. **2.** 5 *дм*. **3.** 4 *см*; 8 *см*.

Урок 55. **1.** а) 9; б) 4 *см*^{2}; в) 3,5 *см*; г) $\frac{1}{2}TB-CA$; д) 0,2. **2.** Указание: $\Delta CMH \backsim \Delta BCA$.

Литература и электронные ресурсы, использованные при составлении учебника, а также рекомендуемые для дополнительного изучения

1. Азамов А., Б. Хайдаров. Математика сайёраси. Тошкент. «Ўқитувчи», 1993 (на узб.яз.).
2. Александров А.Д. и др. "Геометрия -9", учебник, Москва. «Просвещение», 2013.
3. Атанасян С.И. и др. "Геометрия 7-9 классы", учебник, Москва. «Просвещение», 2017.
4. Бевз Г.П. и др. "Геометрия 9", учебник, Киев, "Вежа", 2007.
5. Билянина О.Я. и др. "Геометрия 8" учебник, Киев, "Генеза", 2010.
6. Истер О.С. "Геометрия 9", учебник, Киев, "Освита", 2007.
7. Мерзляк А.Г. и др., "Геометрия 9", учебник, Харьков, "Гимназия", 2008.
8. Перельман Я.И. Занимательная геометрия, Москва, "Юрайт", 2019.
9. Погорелов А.В. "Геометрия 7-9", учебник, Москва. "Просвещение", 2004.
10. Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп, Москва. "Наука", 1993.
11. Daniel C.Alexander, Elementary geometry for college students, Canada, Brooks/ Cole, Cengage Learning, 2011.
12. Mal Coad and others, Mathematics for the international students, Haese and Harris publications, Australia, 2010.
13. Jennie M. Bennett, «Pre-Algebra» Holt, Rinehart and Winston, New York, 2004
14. http://www.uzedu.uz - сайт Министерства народного образования Республики Узбекистан.
15. http://www.eduportal.uz - информационно-образовательный портал Министерства народного образования Республики Узбекистан.
16. http://www.matematiku.ru - математический портал.
17. http://www.problems.ru/ - информационно-поисковая система «Задачи».
18. http://www.ixl.com – сайт дистанциооного обучения (на англ.яз.).
19. http://www.mathkang.ru - российская страница международного математического конкурса «Кенгуру».
20. https://ru.khanacademy.org – российская страница Академии Хана
21. http://www.brilliant.org – сайт дистанционного обучения математике и естественным наукам (на англ.яз.).
22. https://www.mccme.ru – сайт московского центра непрерывного математического образования.
23. http://www.occd.org/pisa - Открытые задания PISA, Сайт Организации экономического сотрудничества и развития .

Хайдаров Боходир Каюмович
Геометрия: Учебник для 9-х классов/Б.К.Хайдаров, Э.С.Сариков, А.Ш.Кучкаров. — Т.:, 2019.—160 с.

Х 18
К.Хайдаров, Боходир.
ISBN 978-9943-5874-7-2

UDK 514.1(075)
BBK 22.151я7

Boxodir Qayumovich Xaydarov,
Ergashvoy Sotvoldiyevich Sariqov,
Atamurod Shamuratovich Qo‘chqorov

GEOMETRIYA
9-sinf uchun darslik

To‘rtinchi nashri
(Rus tilida)

"Huquq va Jamiyat" nashriyoti, 2019,
Toshkent sh, Jumamasjid ko‘chasi 6-uy.

Original-макет "Huquq va Jamiyat" nashriyoti tomonidan tayyorlandi.

Переводчик	*Ш. Исмаилов*
Редактор	*Ш.Дадашева*
Художественный редактор	*А.Умарова*
Главный дизайнер	*дизайн-группа H&J*
Верстка	*Д.Искандербеков*

Litsenziya AI №022, 27.10.2018 yil.

Bosishga ruxsat etildi 06.09.2019 y. Bichiмi $70\times100^1/_{16}$. Тaумs garniturasi.
Kegli 10. Ofset usulida bosildi. Shartli bosма tabog‘i 11,7.
Nashr tabog‘i 11,83. Adadi 64 333 nusxa. 14-286 sonli buyurtма.

Издательство «Huquq va Jamiyat»
Ташкент, Юнусобод 6, улица Жума масжид
Свидетельство №10-2750, 13.06.2017 г.

Сведения о состоянии учебника, выданного в аренду

№	Имя и фамилия ученика	Учебный год	Состояние учебника при получении	Подпись классного руководи теля	Состояние учебника при сдаче	Подпись классного руководи теля
1						
2						
3						
4						
5						
6						

При выдаче учебника в аренду и сдаче его в конце учебного года классным руко-водителем заполняется приведенная выше таблица в соответствии со следующими критериями.

Новый	Состояние учебника перед поступлением в аренду.
Хороший	Обложка целая, не оторвана от основной части книги. Все страницы имеются, целые, не порваны, не отклеены, на страницах нет надписей и линий.
Удовлетвори-тельный	Обложка измята, исчерчена, края обтрепаны, отделена частично от основной части книги и отреставрирована пользователем. Реставрирование удовлетворительное. Вырванные страницы подклеены, некоторые страницы исчерчены.
Неудовлетвори-тельный	Обложка исчерчена, разорвана полностью или частично оторвана от основной части книги, отреставрирована удовлетворительно. Страницы порваны, отсутствуют некоторые страницы, разукрашены, испачканы, восстановление невозможно.